Séances de mai/juin 2023
Une correction

Table des matières

1 Dénombrabilité, bijections **1**
- 1.1 Injection, surjection, bijection . . . 1
- 1.2 Généralités sur la dénombrabilité . . . 3

2 Limites des fonctions d'une variable réelle **6**
- 2.1 Définition de la limite . . . 6
- 2.2 Limite à gauche et à droite . . . 7
- 2.3 Limite épointée . . . 7
- 2.4 Monotonie et limites à droite et à gauche . . . 7
- 2.5 Caractérisation séquentielle de la limite . . . 8

3 Continuité **9**
- 3.1 Généralités . . . 9
- 3.2 Caractérisation séquentielle de la continuité . . . 10
- 3.3 Uniforme continuité . . . 11

4 Dérivabilité **13**
- 4.1 Définition . . . 13
- 4.2 Les théorèmes de Rolle . . . 13
- 4.3 Le théorème des accroissements finies . . . 15

5 Les formules de Taylor **16**
- 5.1 Les formules globales . . . 16
  - 5.1.1 La formule de Taylor-Lagrange . . . 16
  - 5.1.2 La formule de Taylor-Intégrale . . . 17
- 5.2 La formule locale . . . 17

1 Dénombrabilité, bijections

1.1 Injection, surjection, bijection

Définition 1 *Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.*

— *On dit que f est injective lorsque pour tout $(x, x') \in X^2$ on a :*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

— *On dit que f est surjective lorsque* $\operatorname{Im} f = Y$ *où* $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Exercice 1
Soient X et Y deux ensembles

1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Démontrer que g est surjective et que f est injective.
2. Soit $f : X \to Y$.
   a) Démontrer que f est surjective si et seulement s'il existe $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$.
   b) Démontrer que f est injective si et seulement s'il existe $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$.

1. • Soient x_1 et x_2 dans Y tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$\underbrace{g \circ f}_{=\mathrm{Id}_X}(x_1) = \underbrace{g \circ f}_{=\mathrm{Id}_X}(x_2),$$

donc $x_1 = x_2$ et ainsi f est injective.

• Soit $x \in X$. Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, il vient :

$$x = g\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im} g,$$

ce qui assure que $X = \operatorname{Im} g$ et ainsi g est surjective

2. a) • On suppose qu'il existe $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$. Selon la question 1, la fonction f est surjective.

• Supposons que f soit surjective. Soit y dans Y. On choisit un antécédent x_y de y par f parmi tous les antécédents de y (il en existe car f est surjective). On pose alors : $s(y) = x_y$. On a alors bien défini une application $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$.

b) • On suppose qu'il existe q'il existe $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$. Selon la question la fonction f est injective.

• Supposons que f soit injective. Pour tout y dans $\mathrm{Im}\, f$ on pose : $r(y) = x$ où x est l'unique antécédent de y par f. On pose encore, lorsque $y \in Y \setminus \mathrm{Im}\, f$: $r(y) = *$ où $*$ est un élément de X.
On a alors bien défini une application $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Théorème 1
Soient X et Y deux ensembles. Alors il existe une injection $f : X \to Y$ si et seulement s'il existe une surjection $g : Y \to X$.

Exercice 2
Démontrer le théorème 1.

• Supposons qu'il existe une application $f : X \to Y$ qui soit injective. D'après l'exercice 1, question 2, il existe une application $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$. Alors, d'après la question 1 de l'exercice 1, r est surjective.
• Supposons qu'il existe une application $g : Y \to X$ qui soit surjective. D'après l'exercice 1, question 2, il existe une application $s : X \to Y$ telle que $g \circ s = \mathrm{Id}_X$. Alors, d'après la question 1 de l'exercice 1, s est injective.

Exercice 3
Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On note $\{0,1\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont en bijection.

1. Supposons qu'il existe une surjection $f : X \to \mathcal{P}(X)$. On considère considérer l'ensemble :

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Comme $A \in \mathcal{P}(X)$, il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = A$ et on a alors l'alternative suivante :
— ou bien $x_0 \in A$ et alors $x_0 \notin f(x_0) = A$, ce qui est absurde ;
— ou bien $x_0 \notin A = f(x_0)$ et alors $x_0 \in A$, ce qui est également absurde.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, notons $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A, c'est à dire l'élément de $\{0,1\}^X$ défini par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On considère alors l'application $\varphi = \begin{pmatrix} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{pmatrix}$, qui est bijective. En effet :
— Pour x dans X et A et B dans $\mathcal{P}(X)$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$ on a :

$$x \in A \Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B,$$

donc $A = B$ et ainsi φ est injective.
— Soit $f \in \{0,1\}^X$. On pose $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ et on a alors $f = \mathbb{1}_A = \varphi(A)$, donc φ est surjective.

Exercice 4
1. Trouver une bijection de $]0,1]$ sur $]0,1[$.
2. A l'aide de l'écriture décimale propre d'un réel, trouver une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[^2$.

1. On prend la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1/2^n$ (cette suite décroit strictement vers 0). A chaque u_n on lui associe u_{n+1}. A chaque x de $]0,1]$ non terme de la suite u on lui associe lui même. On a alors définie une fonction de $]0,1]$ dans $]0,1[$ qui est bijective comme le montre la figure 1.

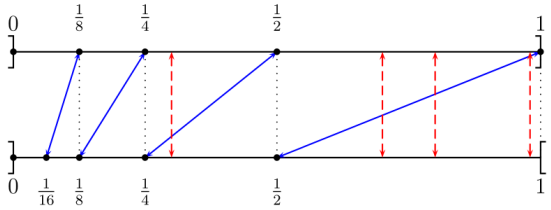


FIGURE 1 – Une bijection de $]0,1]$ sur $]0,1[$

2. Rappelons quelques subtilités de l'écriture décimale des nombres.
   Par exemple le nombre $1,\overline{9} = 1,999\ldots$ (infinité de 9) n'est autre que le nombre 2. En effet si on pose $a = 1,\overline{9}$ alors on a

$$10a - a = 18 \quad \text{donc} \quad a = \frac{18}{9} = 2.$$

   La même procédure permet d'écrire sous forme décimale, c'est à dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \geqslant 1$ entier, tout nombre qui s'écrit avec une infinité de 9 consécutifs.
   Ainsi on peut écrire tout nombre réel x de telle manière que son écriture ne se termine pas par une infinité de 9 consécutifs : on parle *d'écriture décimale propre* de x.

   Soit x dans $[0,1[$, par exemple :

$$x = 0,58991506972\ldots$$

   On fait des paquets, en se servant des 9 contenus dans **l'écriture décimale propre** de x :

$$x = 0,5 \mid 8 \mid 991 \mid 5 \mid 0 \mid 6 \mid 97 \mid 2\ldots$$

   Les paquets sont constitués de la manière suivante :

   - Si le chiffre est distinct de 9, on le prend tout seul.
   - Sinon on prend tous les 9 qui le suivent ainsi que le chiffre suivant.

   Comme il s'agit d'un développement décimal propre, il est possible de faire cela : il ne peut y avoir une infinité de 9 consécutifs.

   A ce nombre x on associe le couple de nombres (a,b) défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a &= 0,5 \mid 991 \mid 0 \mid 97 \mid \ldots \\ b &= 0,8 \mid 5 \mid 6 \mid 2 \mid \ldots \end{aligned}$$

   Noter que l'on a distribué alternativement les paquets vers a puis b. Les nombres a et b sont tous les deux dans l'intervalle $[0,1[$: on définit ainsi correctement une application f de l'intervalle $[0,1[$ dans $C = [0,1[^2$
   Considérons maintenant un couple de nombres (a,b) dans C. On écrit a et b à l'aide de leur développement décimal propre. Par exemple :

$$\begin{aligned} a &= 0,98765990\ldots \\ b &= 0,01235\ldots \end{aligned}$$

   Comme précédemment on fait des paquets à l'aide des 9 :

$$\begin{aligned} a &= 0,98 \mid 7 \mid 5 \mid 5 \mid 990 \mid \ldots \\ b &= 0,0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid \ldots \end{aligned}$$

   A ce couple, on associe le nombre x défini par :

$$x = 0,98 \mid 0 \mid 7 \mid 1 \mid 5 \mid 2 \mid 5 \mid 3 \mid 990 \mid 4 \mid \ldots$$

   Noter que l'on a défini x en prenant successivement des paquets de a puis de b et que ce nombre x appartient à $[0,1[$. On définit ainsi correctement une fonction g de C dans $[0,1[$.

   On voit sans peine que $f \circ g = \mathrm{Id}_C$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1[}$. Ainsi f est bijective.

1.2 Généralités sur la dénombrabilité

Définition 2 *Un ensemble E est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ainsi lorsque E est dénombrable on peut numéroter ses éléments et écrire $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 5

1. Démontrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. **Procédé diagonal de Cantor.** Démontrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, n'est pas dénombrable.

1. Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. On note :

$$\begin{cases} x_0 = \min A & \text{(existe car } A \text{ est non vide)} \\ x_1 = \min A \setminus \{x_0\} \\ x_2 = \min A \setminus \{x_0, x_1\} \\ \vdots \end{cases}$$

On a alors une suite (x_k) d'éléments de A, distincts deux à deux, et $k \mapsto x_k$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.

2. On suppose que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable. On peut alors énumérer ses éléments $x_0, x_1, x_2, \ldots$ qui sont des suites. On définit alors la suite y en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$y(n) = 1 - x_n(n)$$

Cette suite est bien dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et n'est égale à aucune des suites x_k puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme $y(k)$ n'est jamais égal à $x_k(k)$.

Théorème 2

1. *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.*
2. *Si E est au plus dénombrable et si $f : E \to F$ est surjective alors F est au plus dénombrable.*

Exercice 6

Démontrer le théorème 2.

1. • On suppose qu'il existe une surjection de $f : \mathbb{N} \to E$. Il existe donc $g : E \to \mathbb{N}$ injective (selon le théorème 1). De là $g : E \to g(E) \subset \mathbb{N}$ est bijective ce qui prouve que E est au plus dénombrable.

   • On suppose que E est au plus dénombrable. Alors :

   — ou bien E est fini et il existe une injection $g : E \hookrightarrow \mathbb{N}$ donc une surjection $\mathbb{N} \to E$ (selon le théorème 1).

   — ou bien E est dénombrable et alors il existe $\sigma : \mathbb{N} \to E$ bijective donc surjective.

2. On suppose que E est au plus dénombrable et que $f : E \to F$ est surjective. D'après le premier point du théorème 2, il existe une surjection $\varphi : \mathbb{N} \to E$ et alors $f \circ \varphi : N \to F$ est surjective, donc F est au plus dénombrable.

Exercice 7

1. Démontrer que toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.
2. Démontrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

1. Soient $F \subset E$ où f est un ensemble au plus dénombrable. On a une injection naturelle $F \to E$ donc une surjection de E sur F selon le théorème 1.

2. Supposons que $[0,1[$ soit dénombrable. On peut donc énumérer ses éléments : $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $x_n(k)$ la k-ième décimale du « développement propre » du réel x_n.
   On considère alors le réel y de partie entière 0 dont la k-ième décimale ($k \in \mathbb{N}$) est :

$$y(k) = \begin{cases} 9 - x_k(k) & \text{si } x_k(k) \neq 0 \\ 1 & \text{si } x_k(k) = 0 \end{cases}$$

   Ce réel y est bien dans $[0,1]$ est n'est pas dans la liste $x_0, x_1, x_2, \ldots$, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa k-ième décimale diffère de celle de x_k

Théorème 3

1. *$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*
2. *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
3. *Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*
4. *Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Exercice 8

Démontrer le théorème 3

1. • Pour $\mathbb{N}^2$ un dessin suffit !

2. Soient E et F des ensembles dénombrables. Il existe donc des applications $\sigma_E : \mathbb{N} \to E$ et $\sigma_F : \mathbb{N} \to F$ bijectives. Alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & E \times F \\ (m,n) & \longmapsto & (\sigma_E(m), \sigma_F(n)) \end{pmatrix}$$

est surjective. Enfin $E \times F$ contient $E \times \{*\}$, où $*$ est un élément quelconque de E, qui est infini

On procède alors par récurrence pour un produit fini.

3. • L'application $f = \begin{pmatrix} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (m,n) & \longmapsto & (-1)^m n \end{pmatrix}$ est surjective.
Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $\mathbb{Z}$ est au plus dénombrable selon le théorème 2 et infini, car il contient $\mathbb{N}$.

• L'application $g = \begin{pmatrix} \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (m,n) & \longmapsto & \dfrac{n}{m} \end{pmatrix}$ est surjective et $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ est dénombrable.

4. Soient I un ensemble dénombrable et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensemble dénombrable. Pour tout $i \in I$ il existe une bijection $\sigma_i : \mathbb{N} \to E_i$. Alors :

$$f = \begin{pmatrix} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i \\ (i,n) & \longmapsto & \sigma_i(n) \end{pmatrix}$$

est surjective. Comme $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable. Comme il contient une partie infinie, c'est un ensemble dénombrable.

Exercice 9

1. Démontrer que $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, est dénombrable.
2. Un complexe α est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et dans le cas contraire il est dit *transcendant*. Démontrer qu'il existe des nombres transcendants.

1. On a $\mathbb{Q}[X] = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré inférieur à n.
Mais chaque $\mathbb{Q}_n[X]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ qui est dénombrable, donc $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles dénombrables.

2. Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $Z_{\mathbb{C}}(P)$ l'ensemble des racines complexes de P. On note $\overline{Q}$ l'ensemble des nombres algébriques. On a :
$$\overline{Q} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}} Z_{\mathbb{C}}(P).$$
Pour tout P dans $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, $Z_{\mathbb{C}}(P)$ est fini, donc $\overline{Q}$ est dénombrable comme union dénombrable (puisque $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable) d'ensembles finis.

Exercice 10 (Le théorème de Cantor-Bernstein)
Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : X \to Y$ et une application injective $g : Y \to X$.
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Berstein qui affirme qu'alors X et Y sont en bijection.

1. On suppose de plus dans cette première question que $Y \subset X$. On définit alors une suite de parties de X en posant :
$$\begin{cases} X_0 = X \setminus Y \\ X_n = f(X_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$
On pose également $\widehat{X} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.
   a) Démontrer que l'on définit correctement une application $h : X \to Y$ en posant :
   $$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \widehat{X} \\ x & \text{si } x \in X \setminus \widehat{X} \end{cases}.$$
   b) Démontrer que h est une bijection.
2. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

1. a) Pour tout $x \in \widehat{X}$, on a bien $f(x) \in Y$. Si maintenant $x \in X \setminus \widehat{X}$ alors $x \notin X_0$ donc $x \in Y$. On a donc bien défini une application de X dans Y.

b) • Montrons que h est surjective. Soit $y \in Y$. On a deux cas :

— **Cas 1 :** $y \in X \setminus \widehat{X}$. On a alors $h(y) = y$ et ainsi $y \in \operatorname{Im} h$.

— **Cas 2 :** $y \in \widehat{X}$. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y \in X_n$ (puisque y ne peut appartenir à X_0) et ainsi $y \in f(X_{n-1})$. Il existe donc $x \in X_{n-1}$ tel que $f(x) = y$, donc, par définition de h, comme $x \in \widehat{X}$, il vient $y = h(x) \in \operatorname{Im} h$.

Dans tous les cas $y \in \operatorname{Im} h$: h est surjective.

• Montrons que h est injective. Soient x et x' dans X tels que $h(x) = h(x')$. Trois cas se présentent (quitte à changer x en x').

— **Cas 1 :** x et x' sont dans $\widehat{X}$. On a alors $f(x) = f(x')$ et comme f est injective, il vient $x = x'$.

— **Cas 2 :** x et x' sont dans $X \setminus \widehat{X}$. On a alors directement $x = x'$.

— **Cas 3 :** $x \in \widehat{X}$ et $x' \in X \setminus \widehat{X}$. Il vient alors $f(x) = x'$. Mais il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$ et alors $f(x) \in X_{n+1}$ donc $x' \in \widehat{X}$, ce qui est absurde. Ce cas ne se présente donc pas.

On obtient donc $x = x'$ et h est injective.

2. Ici Y n'est plus une partie de X, mais $g(Y)$ qui est en bijection avec Y est une partie de X et $g \circ f$ est une injection, par composition, de X dans $g(Y)$. La question 1 permet d'affirmer que X et $g(Y)$ sont en bijection, donc X et Y aussi.

2 Limites des fonctions d'une variable réelle

2.1 Définition de la limite

Définition 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, a un réel qui appartient à $\overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha_\varepsilon > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x - a| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Exercice 11
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et a est un réel qui appartient à $\overline{I}$.

1. Démontrer que lorsque f admet une limite réelle ℓ en a alors cette limite est unique. *Cela permet d'utiliser la notation* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
2. Démontrer que lorsque f admet une limite réelle ℓ en a alors f est bornée au voisinage de a.

1. Supposons, avec les notations de la définition, que f admette en a deux limites ℓ et λ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que si $x \in I$ on ait :

$$\begin{cases} |x - a| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ |x - a| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Ainsi, dès que x dans I vérifie $|x - a| \leqslant \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a :

$$|\ell - \lambda| = |\ell - f(x) + f(x) - \lambda| \underbrace{\leqslant}_{IT} |\ell - f(x)| + |f(x) - \lambda| \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\ell - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Si $\ell \neq \lambda$ en prenant $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \lambda|}{2}$ on obtient une contradiction.

2. On suppose que f admet une limite réelle ℓ en a. Il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in$ et $|x - a| \leqslant \alpha$ on a ait : $|f(x) - \ell| \leqslant 1$.
Ainsi dès que $x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$ on a :

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|\,.$$

Remarque 2.1

1. J'ai pris comme cadre une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ mais on peut tout à fait prendre une partie A quelconque de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on prend pour a un point *adhérent* à A...
2. Avec les notations de la définition 3, lorsque $a \notin I$, on dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists \alpha_A > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x - a| \leqslant \alpha_A \Rightarrow f(x) \geqslant A)\,.$$

Il y a encore « unicité de la limite » d'où la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

3. On peu donner bien sûr des définitions équivalentes pour les notations $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$...(le faire !)

Théorème 4 (Composition des limites)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, a un élément de I ou une borne de I, b un élément de J ou une borne de J, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$. Alors :

$$g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque 2.2
On peut aussi composer des fonctions qui ne sont pas forcément définies sur des intervalles, mais pour lesquelles les la composition est possible et les limites existent.

Exercice 12
Démontrer le théorème 4 dans le cas où a, b et ℓ sont des réels.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que les relations $y \in J$ et $|y - b| \leqslant \eta$ impliquent :

$$|g(y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, il existe $\alpha > 0$ tel que les relations $x \in I$ et $|x - a| \leqslant \alpha$ impliquent $|f(x) - b| \leqslant \eta$.

Ainsi, pour tout x dans I tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, comme $|f(x) - b| \leqslant \eta$, il vient :

$$|g(f(x)) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

2.2 Limite à gauche et à droite

Définition 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, non borne de I, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a lorsque la restriction $f\,|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a.*

Remarque 2.3
1. On peut bien sûr définir des notions de limite réelle à droite, de limite infinie à droite et gauche...(le faire !).
2. Avec les notations de la définition précédente, la limite à droite en a, lorsqu'elle existe, se note :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a+0),$$

(cette dernière notation pouvant prêter à confusion...).

3. Pour bien comprendre, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ alors f admet une limite à droite et à gauche en 0 qui sont respectivement $f(a+0) = 1$ et $f(a-0) = 0$. Mais f n'admet pas en a de limite.

2.3 Limite épointée

Définition 5 *Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite épointée en a lorsque la restriction $f\,|_{I\setminus\{a\}}$ admet ℓ pour limite en a.*

Remarque 2.4
1. On peut aussi parler de limite infinie épointée en a.
2. Comme pour les notions précédentes de limite, il y a unicité de la limite épointée. La notation est la suivante :

$$\lim_{x\to a^\bullet} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a^\bullet} f$$

Exercice 13
Trouver une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que g admette une limite à droite et à gauche en 0, une limite épointée en 0, mais n'admette pas de limite en 0.

On prend la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2.4 Monotonie et limites à droite et à gauche

Théorème 5
Soient $\tilde{a} < \tilde{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $f :]\tilde{a}, \tilde{b}[\to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$ alors f admet une limite (qui peut être infinie) en $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.

Démonstration. Supposons que f est croissante sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$. L'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ f(x) \mid x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi on, peut considérer :

$$\begin{cases} \ell & = \inf \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ L & = \sup \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

On distingue deux cas.

— **Cas 1**. Supposons que $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $L \leqslant A + \varepsilon$. Puis il existe $a \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ tel que $f(a) = A$. Si $x \geqslant a$ avec $x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ on aura, par croissance de f, $L \leqslant f(x) + \varepsilon$ de sorte que :

$$|f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{\tilde{b}} f = L$.

— **Cas 2**. On suppose que $L = +\infty$. Soit A réel. Comme $\sup \mathcal{E} = +\infty$, il existe $a \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ tel que $f(a) \geqslant A$. Par croissance de f, si $x \geqslant a$ avec $x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$, on aura $f(x) \geqslant A$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{\tilde{b}} f = +\infty$.

Tout ce qui manque se traite de la même manière. □

Corollaire 5.1
Toute fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite à droite réelle et une limite à gauche réelle en tout point de cet intervalle.

Exercice 14
Démontrer ce corollaire.

On pose $I =]\tilde{a}, \tilde{b}[$ où $\tilde{a} < \tilde{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante. Soit $a \in I$. La fonction $g = f\,|_{]\tilde{a},a[}$ est croissante et majorée par $f(a)$. Selon le théorème 5, elle admet donc en a une limite réelle en a i.e. f admet une limite à gauche réelle en a. Le reste se traite de la même manière.

Exercice 15

1. Démontrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable.
2. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$. Pour x réel on pose :

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

   a) Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et croissante.
   b) Démontrer que tout nombre rationnel est un point de discontinuité de la fonction f.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Soit Δ l'ensemble des points de discontinuité de f. Pour a dans Δ, les intervalles $I_a =]f(a-0), f(a+0)[$ sont non vides et disjoints deux à deux. On construit alors une injection $f : \Delta \to \mathbb{Q}$ en posant pour $a \in \Delta : f(a) = r_a$ où r_a est un rationnel appartenant à l'intervalle I_a.
2. a) Comme la série $\sum 2^{-n}$ converge, la fonction f est bien définie.
   Si $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel dans l'intervalle $]x, y[$ donc f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 = r_m$.
   Ainsi pour tout rationnel $r > x_0$ on a : $f(x_0) + \dfrac{1}{2^m} \leqslant f(r)$.
   Il en résulte immédiatement que $f(x_0) < f(x_0+0)$: f n'est pas continue en x_0.

2.5 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 6
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I ou une borne de I, $f : I \to \mathbb{R}$. Pour ℓ réel, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $\lim\limits_{a} f = \ell$.

(2) Pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a :

$$f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 16
Démontrer le théorème 6.

Le sens (1) $\subset$ (2) relève de la composition des limites (adapter la preuve du théorème 4).

Supposons que pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ on a : $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.. Montrons que $\lim\limits_{a} f = \ell$. On raisonne par l'absurde. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists x \in I)(|x - a| \leqslant \alpha \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc x_n dans I tel que :

$$|x_n - a| \leqslant 2^{-n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - \ell| > \varepsilon.$$

On a ainsi construit une suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ mais la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ : c'est absurde.

Remarque 2.5

1. Il y a bien sur des énoncés analogues en remplaçant a par $\pm\infty$ ou ℓ par $\pm\infty$.
2. Ce théorème s'utilise souvent dans le sens (2) $\Rightarrow$ (1), le sens (1) $\Rightarrow$ (2) n'étant qu'une version du ***théorème de composition des limites***.

3 Continuité

3.1 Généralités

Définition 6 *Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en a lorsque $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. La fonction f sera dite continue (sur I) lorsque f est continue en tout point de I.*

Théorème 7
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque 3.1

1. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$. Pour montrer que I est un intervalle, on montre que pour tout $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :
$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in I.$$
Notez que $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pour λ dans $[0, 1]$ est une paramétrisation du segment d'extrémités x et y.
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont aussi exactement les *parties connexes* de $\mathbb{R}$.
2. Ce théorème est est un cas particulier d'un énoncé plus général : *l'image d'un connexe par une application continue est un connexe.*

Corollaire 7.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soient $a < b$ dans I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout y entre (au sens large) $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration. Puisque f est continue, $f([a, b])$ et un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$. □

Exercice 17
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Démontrer que f a un point fixe dans $]0, 1[$.

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Raisonnons par l'absurde et supposons que g ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Comme elle est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g > 0$ ou $g < 0$ sur $]0, 1[$. Dans le premier cas, il vient donc :

$$0 < \int_0^1 g = \int_0^1 f - \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. L'autre cas se traite de même.

Théorème 8 (Weierstraß)
L'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment. En particulier, si $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 3.2
C'est un cas particulier d'un énoncé plus général : *l'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Exercice 18
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite réelle ℓ en $+\infty$. Démontrer que f est bornée.

Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $A \in R^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait :

$$|f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

Ainsi, si $x \geqslant A$, il vient : $|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$.
Enfin f est continue sur le segment $[0, A]$: elle y est bornée par un réel positif M.

3.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 9
Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) *f est continue en a.*
(2) *Pour tout suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$, on a : $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

Démonstration. C'est une simple traduction de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Remarque 3.3
Ce théorème, qui se généralise à des applications entre espaces métriques, sert souvent à démontrer que des applications sont ou ne sont pas continues en a. Dans ce dernier, on exhibe une suite (x_n) telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ mais $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exercice 19
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Démontrer que f est continue en 0 si et seulement $\exists \lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$.
2. Ce dernier résultat est-il toujours vrai si f n'est plus supposée croissante ?

• Si f est continue en 0, par composition des limites on a bien $f(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

• On suppose $f(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$ on ait $\underbrace{\left|f(\frac{1}{n}) - f(0)\right|}_{=f(\frac{1}{n})-f(0)} \leqslant \varepsilon$.
Si maintenant x est dans $[0, 1/N]$ on a alors, par croissance de f :

$$0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant f(1/N) - f(0) \leqslant \varepsilon.$$

On a donc bien $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$.

• On prend la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{2\pi}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1/n) = 0 \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ mais en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, on a $f(x_n) = 1$. Comme $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, f ne peut être continue en 0.

Exercice 20
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. On suppose que g est décroissante. Démontrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Fixons $x_0 > 0$. Comme la fonction f est croissante, elle admet en x_0 une limite à droite $f(x_0 + 0)$ et à gauche $f(x_0 - 0)$ telles que :

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Maisd g est décroissante : elle admet donc aussi en c_0 une limite à droite et une limite à gauche avec :

$$\underbrace{g(x_0 + 0)}_{=\frac{f(x_0+0)}{x_0}} \leqslant g(x_0) \leqslant \underbrace{g(x_0 - 0)}_{=\frac{f(x_0-0)}{x_0}}$$

Il vient donc $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$: f est continue en x_0.

Exercice 21
Trouver toutes les fonctions continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

• Supposons que f soit dérivable. En fixant y réel, pour tout x réel on a alors :$f'(x + y) = f'(x) + 0$.

On fixe alors $x = 0$, ce qui donne $f'(y) = f'(0)$. Cette dernière égalité étant valable pour tout y réel, f est à dérivée constante : c'est une fonction affine. Comme $f(0) = 0$ (remplacer x et y par $0\ldots$), on peut conclure que f est linéaire.

• **« Intégrer pour dériver ».** On ne suppose plus f dérivable.
On a pour tout y et t réel :$f(t + y) = f(t) + f(y)$.
Ainsi, à y fixé, il vient, pour tout x réel :

$$\int_0^x f(t + y)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}t.$$

On prend $x = 1$ pour obtenir, pour tout y réel : $f(y) = \int_0^1 f(t+y)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais, en remarquant que $\int_0^1 f(t+y)\,\mathrm{d}t = \int_y^{y+1} f(u)\,\mathrm{d}u = F(y+1) - F(y)$, où $F : y \mapsto \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1, on voit que f est aussi de classe C^1 : on peut utiliser le premier point pour conclure.

3.3 Uniforme continuité

Définition 7 *Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha_\varepsilon > 0)\,\big(\forall (x,y) \in I^2\big)\,(|x-y| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Remarque 3.4
Une application uniformément continue « ne peut avoir des variations trop brusques ».

Exercice 22
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne.
Démontrer que f est uniformément continue sur I.

On suppose que f est k-lipschitzienne avec $k > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x,y) \in I^2$ on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y| \leqslant \varepsilon,$$

dès que $|x-y| \leqslant \alpha = \varepsilon/k$.

Théorème 10 (Heine)
Toute application continue sur un segment est uniformément continue.

Exercice 23
Démontrer le théorème 10.

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas uniformément continue. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists (x,y) \in I^2)(|x-y| \leqslant \alpha \ \text{ et } \ |f(x) - f(y)| > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$ on dispose donc de x_n et y_n dans I tels que :

$$|x_n - y_n| \leqslant 2^{-n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Mais la suite (x_n) est dans le compact $[a,b]$: il existe une extraction φ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in [a,b]$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\big|y_{\varphi(n)} - \ell\big| \leqslant \underbrace{\big|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\big|}_{\leqslant 2^{-n}} + \big|x_{\varphi(n)} - \ell\big|$$

Ainsi $y_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par sandwich. Par continuité de f il vient :

$$f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) \ \text{ et } \ f(y_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Ainsi $\varepsilon < \big|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\big| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est profondément stupide.

Exercice 24
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est uniformément continue sur I.
(ii) Pour toutes les suites (u_n) et (v_n) dans I qui vérifient $|u_n - v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $|f(u_n) - f(v_n)| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• $(i) \Rightarrow (ii)$.
On suppose que f est uniformément continue sur I. Soient (u_n) et (v_n) dans I qui vérifient $|u_n - v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur I il existe $\eta > 0$ tel que les relations $(x,y) \in I^2$ et $|x-y| \leqslant \eta$ impliquent $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
Comme $|u_n - v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|u_n - v_n| \leqslant \eta$. Alors, pour tout $n \geqslant N$ il vient :

$$|f(u_n) - f(v_n)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi $|f(u_n) - f(v_n)| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

• $(ii) \Rightarrow (i)$.
Supposons que pour toutes les suites (u_n) et (v_n) dans I qui vérifient $|u_n - v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ on ait $|f(u_n) - f(v_n)| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction f n'est pas uniformément continue sur I. Ainsi :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \alpha > 0)(\exists (x,y) \in I^2)(|x-y| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc u_n et v_n dans I tels que $|u_n - v_n| \leqslant 2^{-n}$ et $|f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon$.
On a donc construit deux suites (u_n) et (v_n) dans I telles que $u_n - v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais qui ne vérifient pas $|f(u_n) - f(v_n)| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$: c'est absurde.

Exercice 25

1. Démontrer que la fonction $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0,1]$ mais pas lipschitzienne sur cet intervalle.
2. Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. • La fonction $\sqrt{\ }$ est continue sur le segment $[0,1]$: par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue.

   • Supposons un instant que la fonction $\sqrt{\ }$ soit k-lipschitzienne sur $[0,1]$. Ainsi, pour tout $x \in]0,1]$, on a $\sqrt{x} - \sqrt{0} \leqslant k(x-0)$ et il vient :
   $$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant k.$$
   En faisant tendre x vers 0 on obtient une absurdité.

2. On considère les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
   $$\begin{cases} u_n &= n \\ v_n &= n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$
   On a $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $f(u_n) - f(v_n) = -2$, ce qui met en défaut la caractérisation de l'uniforme continuité vue à l'exercice 24.

Exercice 26 (Débordement)

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\exists \lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est uniformément continue.
2. Démontrer que $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soient T un réel strictement positif, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{+\infty} f = \ell$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $|f(x) - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Si maintenant x et y dans $\mathbb{R}^+$ vérifient $x \geqslant A$ et $y \geqslant A$, on aura :
   $$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - \ell + \ell - f(y)| \\ &\leqslant |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
   Puis sur le segment $[0, A+1]$, la fonction f est continue : selon le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$, que l'on peut supposer être inférieur à 1 tel que les relations $(x,y) \in [0,A+1]^2$ et $|x-y| \leqslant \eta$ impliquent $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   Prenons enfin x et y dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifient $|x-y| \leqslant \eta$. On a alors l'alternative suivante.
   — ou bien $(x,y) \in [0,A+1]^2$ et alors on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$;
   — ou bien l'un de x ou y est strictement supérieur à $A+1$ et alors $(x,y) \in [A, +\infty[^2$, donc $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   En conclusion f est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. □

2. Soit $\varepsilon > 0$.

   • Pour u et v dans $[1, +\infty[$ on a :
   $$\left|\sqrt{u} - \sqrt{v}\right| = \left|\frac{u-v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}\right| \leqslant |u - v|.$$
   Ainsi dès que $(u,v) \in [1,+\infty[^2$ avec $|u-v| \leqslant \varepsilon$ on a $|\sqrt{u} - \sqrt{v}| \leqslant \varepsilon$.

   • Selon le théorème de Heine, $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0,2]$. Il existe donc η dans $]0, \min(1,\varepsilon)[$ tel que si $(s,t) \in [0,2]^2$ avec $|s-t| \leqslant \eta$ on ait $\left|\sqrt{s} - \sqrt{t}\right| \leqslant \varepsilon$.
   Prenons maintenant $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $|x-y| \leqslant \eta$. On a alors l'alternative suivante. :
   — ou bien $(x,y) \in [0,2]^2$ et alors $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon$;

— ou bien l'un de x ou y est strictement supérieur à 2 et alors $(x,y) \in [1,+\infty[^2$, donc $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \varepsilon$.

3. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit T la période de f. Comme f est continue, la fonction f est uniformément continue sur le segment $[-T,2T]$ d'après le théorème de Heine. Il existe ainsi $\eta > 0$ tel que les relations $(u,v) \in [-T,2T]^2$ et $|u-v| \leqslant \eta$ impliquent :

$$|f(u)-f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons maintenant x et y dans $\mathbb{R}^2$ tels que

$$|x-y| \leqslant \min(\eta, T).$$

On pose $N = \lfloor x/T \rfloor$ de sorte que $NT \leqslant x < NT+T$ et donc : $x - NT \in [0,T[$.
On pose alors $u = x - NT$ et $v = y - NT$ de sorte que $|u-v| \leqslant \min(\eta,T)$ et $(u,v) \in [-T,2T]^2$, ce qui amène : $|f(u)-f(v)| \leqslant \varepsilon$.
Par périodicité de f il vient : $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 27
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer qu'il existe a et b réels tels que pour tout x réel on ait :

$$|f(x)| \leqslant ax + b.$$

Il existe $\eta > 0$ tel que les relations $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et $|x-y| \leqslant 1$ impliquent :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 1.$$

Soit $x \geqslant 0$. On considère la partie entière $N = \left\lfloor \dfrac{x}{\eta} \right\rfloor$, de sorte que $N\eta \leqslant x < N\eta + 1$. Pour $k \in \{0,\dots,N\}$ on pose $a_k = k\eta$ et on a alors :

$$\begin{aligned} |f(x)-f(0)| &= |f(x)-f(a_N)+f(a_N)-f(a_{N-1})+\cdots+f(a_1)-f(a_0)| \\ &\leqslant |f(x)-f(a_N)| + \sum_{k=0}^{N-1} |f(a_{k+1}-f(a_k)| \\ &\leqslant N+1 \leqslant \frac{x}{\eta}+1 \end{aligned}$$

On a donc $|f(x)| \leqslant ax+b$ avec $a = 1/\eta$ et $b = |f(0)|+1$.

4 Dérivabilité

4.1 Définition

Définition 8 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Lorsque $a \in I$, on dit que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

Ce nombre ℓ se note alors $f'(a)$.

2. *On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. On peut alors définir une fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui est la fonction dérivée de f sur I.*

Théorème 11
Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Exercice 28
Démontrer le théorème 11

Supposons que f soit dérivable en a. On peut alors écrire :

$$f(x) \underbrace{=}_{x\to a} f(a) + (x-a)f'(a) + \mathrm{o}(x-a).$$

Ainsi : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.

4.2 Les théorèmes de Rolle

Théorème 12
*Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ avec a **non borne de** I, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Si f admet en a un extremum local alors $f'(a) = 0$.*

Remarque 4.1

1. Le fait que a soit non borne de I est essentiel : prendre comme contre-exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1-x$ et $a = 0$.
2. Il n'y a pas de réciproque à ce théorème : prendre la fonction cube et $a = 0$.
3. En fait, seul la dérivabilité de f à l'intérieur de I importe comme va le montrer la démonstration.

Démonstration. Supposons que f admette en a un maximum local. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ et tel que $f\,|_{[a-\alpha,a+\alpha]}$ admette en a un maximum. Si $x \in]a, a+\alpha]$ alors $f(x) \leqslant f(a)$ donc :

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\substack{\longrightarrow \\ x\to a^+}\ f'(a)} \leqslant 0.$$

Il en résulte que $f'(a) \leqslant 0$. En considérant maintenant x dans $[a-\alpha, a[$, on montre de la même manière que $f'(a) \geqslant 0$. □

Théorème 13 (Rolle)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur segment $[a,b]$: elle admet donc son maximum M et un minimum m.

- Si $M = m = 0$ alors f est constante sur $[a,b]$ et $f' = 0$ sur $[a,b]$.
- Sinon, on a $m < M$ et l'un des deux est atteint en un point c dans $]a,b[$. D'après le théorème 12 on a alors $f'(c) = 0$.

□

Remarque 4.2
L'énoncé de ce théorème est encore valable, comme le montre la démonstration, lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$.

Exercice 29
Soient $n \geqslant 2$ entier et $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, qui admet n racines réelles distinctes. Démontrer que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P rangées dans l'ordre strictement croissant. Fixons i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. La fonction polynomiale P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$. De plus $P(a_i) = P(a_{i+1})$: le théorème de Rolle s'applique. Il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. Comme :

$$b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,$$

le polynôme P' admet $n-1$ racines distinctes. □

Exercice 30
Soient α un réel, f dans $\Delta^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$ ayant $n \geqslant 2$ zéros. On considère la fonction $g : x \mapsto \alpha f(x) + f'(x)$. Démontrer que g admet au moins $n-1$ zéros.

On considère la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} f(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et admet n zéros que l'on classe par ordre croissant : $a_1 < \cdots < a_n$. Fixons i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. Comme $g(a_i) = g(a_{i+1}) = 0$, selon le théorème de Rolle, il existe c_i entre a_i et a_{i+1} tel que $g'(c_i) = 0$.
Mais, si $x > 0$, $g'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))$. □

Exercice 31
Soit f dans $C^3([0,2], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

1. Soit λ réel et $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par : $g(t) = f(t) - \frac{1}{6}t(t-1)(t-2)\lambda$. Déterminer $g_\lambda^{(3)}(t)$ pour t dans $[0,2]$.
2. En choisissant λ de manière subtile dans la question précédente, démontrer que pour tout x dans $[0,2]$ il existe c_x dans $[0,2]$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)f^{(3)}(c_x)$$

1. On trouve $g_\lambda^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - \lambda$ pour tout t dans $[0,2]$.
2. Si $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 2$, il n'y a pas de souci.
   Fixons alors x dans $[0,2]$ différent de 0, 1 et 2.
   On pose $\lambda = \dfrac{6f(x)}{x(x-1)(x-2)}$. On a alors $g_\lambda(x) = 0$.
   Ainsi la fonction g_λ admet 4 zéros distincts au moins.
   Via Rolle, $g_\lambda^{(3)}$ admet au moins un zéro. Il existe donc c_x dans $[0,2]$ tel que $g_\lambda^{(3)}(c_x) = 0$ i.e $f^{(3)}(c_x) = \lambda$. □

Exercice 32
Soient $a < b$ réels et f dans $\Delta^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

On considère la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^x\big(f(x) - f'(x)\big)$. Cette fonction est dérivable sur $[a,b]$ avec $g(a) = g(b)$. Selon le théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais on a, pour tout x dans $[a,b]$, $g'(x) = \mathrm{e}^x\big(f(x) - f''(x)\big)\ldots$ □

Exercice 33
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 10x^2 \sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Tracer, avec les outils que vous souhaitez (logiciel lambda, imprimante...), le graphe de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Démontrer que f est dérivable en 0 avec $f'(0) > 0$.
4. Démontrer que f n'est pas croissante au voisinage de 0 i.e. que pour tout $r > 0$, f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-r, r]$.
5. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

1. Le graphe de f au voisinage de 0 est donné par la figure 2.

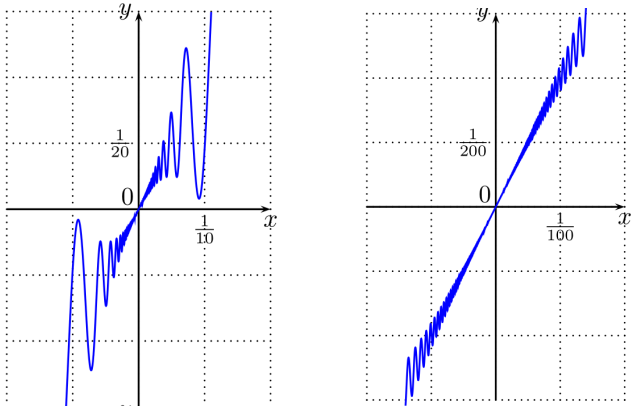


FIGURE 2 – Allure du graphe de f

2. La fonction f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ comme somme de fonctions C^∞ sur ces intervalles. Si x est non nul on a :

$$f'(x) = 1 - 10\cos\frac{1}{x} + 20x\sin\frac{1}{x}.$$

3. Pour $x > 0$ on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x + 10x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x} = 1 + 10x\sin\frac{1}{x}$$

Mais pour tout $x \neq 0$ on a : $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0). Ainsi :

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \in \mathbb{R}.$$

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ posons $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. On a $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f'(x_n) = -9$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Raisonnons alors par l'absurde et supposons que f soit strictement croissante sur un voisinage de 0. Il existe alors $r > 0$ tel que sur $[-r, r]$ la fonction f soit croissante et ainsi $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x dans $[-r, r]$. Comme $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe N entier tel que $x_N \in [-r, r]$ et on a $f'(x_N) = -9$ ce qui amène une contradiction.
5. Si f' est continue en 0, comme $f'(0) = 1$, il existe alors un voisinage de 0 sur lequel $f' > 0$: elle ne peut être continue en 0. On peut aussi utiliser la question précédente, qui montre que f n'est pas continue séquentiellement en 0 puisque $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $f(x_n) = -9 \neq f'(0)$.

4.3 Le théorème des accroissements finies

Théorème 14 (Accroissements finis ponctués)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors c entre a et b tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

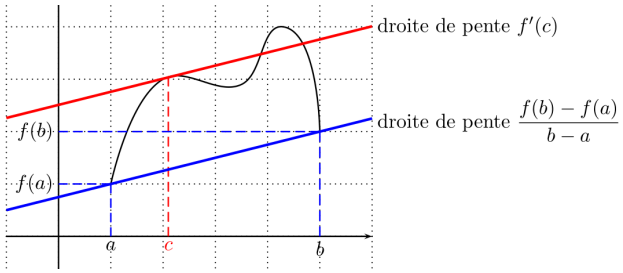


FIGURE 3 – Illustration des accroissements finis

Remarque 4.3

1. Dans la pratique f est dérivable sur $[a,b]$.
2. Ce théorème dit qu'il existe un point de la courbe (au moins) où la tangente (dont l'existence est assurée par le caractère dérivable de f) est parallèle à la droite passant par les points $\big(a,f(a)\big)$ et $\big(b,f(b)\big)$.
3. Si de plus la dérivée de f est bornée par un réel M sur $]a,b[$, on obtient ***l'inégalité des accroissements finis*** :

$$|f(a)-f(b)| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in [a,b]$, par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x) + f(a).$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie : $\varphi(a) = \varphi(b)$. Selon le théorème de Rolle, il existe c dans $]a,b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$.

Comme pour tout x dans $]a,b[$ on a $\varphi'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$, le théorème des accroissements finis est prouvé. □

Exercice 34 (Théorème de Darboux)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soient $\alpha \leqslant \beta$ dans $f'(I)$, $\lambda \in [\alpha,\beta]$ ainsi que a et b dans I tels que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$. On suppose que $a < b$. On considère les fonctions :

$$\varphi = \begin{pmatrix}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{pmatrix} \text{ et } \psi = \begin{pmatrix} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que l'on a : $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ ou $\lambda \in \operatorname{Im}\psi$.

2. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

   • **Première méthode.** Soit $\alpha \leqslant \beta$ dans $f'(I)$ et $\lambda \in [\alpha,\beta]$. Il existe a et b dans I tels que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$. On suppose par exemple que $a < b$ et on considère les fonctions :

$$\varphi = \begin{pmatrix}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{pmatrix} \text{ et } \psi = \begin{pmatrix} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \end{pmatrix}.$$

   La fonction φ est prolongeable par continuité en a en posant $\varphi(a) = f'(a)$. De même la fonction ψ est prolongeable par continuité en b en posant $\psi(b) = f'(b)$.

   Ainsi $\varphi([a,b])$ et $\psi([a,b])$ sont des intervalles, avec un point un commun qui est $\varphi(b) = \psi(a)$: leur union est un intervalle J. Comme J contient α et β, il contient ainsi λ. Il en résulte que $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ ou $\lambda \in \operatorname{Im}\psi$.

   Si par exemple $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $\varphi(x) = \lambda$. Mais le théorème des accroissements finis ponctués assure l'existence de c entre a et x tel que $f'(c) = \varphi(x) = \lambda : \lambda \in \operatorname{Im} f'$. □

   • **Seconde méthode. « Le coup du triangle ».** On considère :

$$T = \big\{(x,y) \in I^2 \mid x < y\big\}\,.$$

   Soit $\varphi : T \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{x-y}$. Comme T est un connexe de $\mathbb{R}^2$ et comme φ est continue, $\varphi(T)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle J de $\mathbb{R}$.

   D'après le théorème des accroissements finis ponctués, on a $J \subset f'(I)$. Par définition de la dérivée, $f'(I) \subset \overline{J}$. Comme $\overline{J}$ ne diffère éventuellement de J que par ses extrémités, $f'(I)$ est un intervalle.

5 Les formules de Taylor

5.1 Les formules globales

5.1.1 La formule de Taylor-Lagrange

Théorème 15 (Taylor-Lagrange)

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, n entier, f dans $C^n([a,b],\mathbb{R})$ avec f Δ^{n+1} sur $]a,b[$. Il existe alors c dans $]a,b[$ tel que :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

Remarque 5.1

1. Pour $a = 0$, il s'agit de la formule de Taylor-MacLaurin.
2. L'ordre de a et b n'a à posteriori pas d'importance.
3. Par exemple, pour $n = 2$ on a donc l'existence de c entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{6} f^{(3)}(c)$$

4. Bien comprendre que c dépend de n de a et de b.
5. **Inégalité de Taylor-Lagrange**
   Lorsque $f^{(n+1)}$ est bornée par M sur $]a,b[$ on a alors l'inégalité de Taylor-Lagrange *:*
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Démonstration. Soit A le réel tel que : $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$.
On considère la fonction auxiliaire φ, définie sur $[a,b]$, par :
$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$
Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. De plus φ est dérivable sur $]a,b[$, et si $x \in]a,b[$, on a :
$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A = \frac{(b-x)^n}{n!} \left[A - f^{(n+1)}(x) \right].$$
Le théorème de Rolle (théorème 13) affirme alors l'existence de c dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ ce qui prouve la formule. □

5.1.2 La formule de Taylor-Intégrale

Théorème 16 (Taylor-Intégrale)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et f dans $C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a alors :
$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}$$

Remarque 5.2
1. Cela généralise le résultat bien connu : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t$.
2. Pour $n = 1$ cela donne : $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t) f''(t)\, \mathrm{d}t$
3. On utilise souvent la formule de Taylor-Intégrale en se ramenant par changement de variable affine à une fonction f définie sur $[0,1]$, ce qui donne à l'ordre 1 :
$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t)\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. On considère la fonction auxiliaire $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par : $\psi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
La fonction ψ est C^1 sur $[a,b]$. Pour x dans $[a,b]$ on a : $\psi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$.
On écrit alors $\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \psi'(x)\, \mathrm{d}x$ ce qui donne immédiatement le résultat. □

Exercice 35
Démontrer que les fonctions polynômes de degré $\leqslant n$ sur un intervalle I non réduit à un point sont exactement les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telles que $f^{n+1} = 0$ sur cet intervalle.

> Il y a une équivalence à montrer. Il est immédiat de voir que si f est une fonction polynôme de degré $\leqslant n$ sur I alors $f^{n+1} = 0$ sur I. Pour la réciproque, on prend une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telles que $f^{n+1} = 0$ sur I et on écrit la formule de Taylor-Lagrange entre x et a où x et a sont dans I pour obtenir le résultat.

5.2 La formule locale

Théorème 17 (Taylor-Young)
Soient $a \in I$ intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$, f dans $\Delta_a^n(I,\mathbb{R})$. Il existe alors une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et, pour x proche de a,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}(x-a)^n}.$$

Cette égalité s'appelle la formule de Taylor-Young à l'ordre n en a.

Démonstration. On fait une récurrence sur $n \geqslant 1$ pour démontrer la propriété suivante :
Dès que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f \in \Delta_a^n(I,\mathbb{R})$ il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et, pour x proche de a,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

— Si $n = 1$, c'est l'identité de la dérivée.
— On suppose que le résultat est valable pour un certain $n \geqslant 1$ entier. Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \Delta_a^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $g = f'$ est dans $\Delta_a^n(I, \mathbb{R})$: on peut lui appliquer l'hypothèse. Il existe ainsi $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ nulle et continue en a telle que :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{=u(x)}. \end{aligned}$$

Pour x proche de a, on pose $U(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

On a : $U'(x) = u(x)$ et $U(a) = 0$. Puis, soit $\delta > 0$. Comme ε est nulle et continue en a, il existe $\gamma > 0$ tel que $|\varepsilon(x)| \leqslant \delta$ dès que $|x - a| \leqslant \gamma$. Ainsi :

$$|U'(x)| \leqslant \delta (x-a)^n \quad \text{si } |x-a| \leqslant \delta.$$

Si, par exemple, on a $a \leqslant x \leqslant a + \gamma$, il vient en intégrant entre a et x :

$$|U(x) - U(a)| \leqslant \frac{\delta (x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Dans tous les cas on obtient : $|U(x) - U(a)| \leqslant \dfrac{\delta |x-a|^{n+1}}{n+1}$.

On pose alors $\zeta(x) = \dfrac{U(x)}{(x-a)^{n+1}}$ si $x \neq a$ et $\zeta(a) = 0$. Ce qui précède assure que ζ est continue en a. Ainsi la propriété est varie au rang $n+1$.

Autre preuve. Pour $n \geqslant 0$ on pose, pour x dans I distinct de a :

$$R_n(x) = \frac{\overbrace{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}^{=\varphi(x)}}{\underbrace{(x-a)^n}_{=\psi(x)}}.$$

On veut démontrer que $\lim_{x \to a} R_n(x) = 0$ ce que l'on obtient par applications successives de la règle de l'hôpital, puisque : $\lim_{x \to a} \dfrac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)} = 0$. □

Remarque 5.3

1. Pour $n = 1$ on retrouve l'identité de la dérivée.
2. L'hypothèse f dans $\Delta_a^n(I, \mathbb{R})$ signifie en fait : f dérivable au voisinage de a, f' dérivable au voisinage de a,..., $f^{(n-2)}$ dérivable au voisinage de a et $f^{(n-1)}$ dérivable en a.
3. Pour la preuve, on procède ici par récurrence.
4. Si on peut écrire la formule à l'ordre n de Taylor-Young pour une fonction f en a alors f admet, en a, un développement limité à l'ordre n (avec réciproque uniquement lorsque $n = 1$). Ainsi :

> Une fonction C^∞ sur un intervalle I
> admet en tout point de I un développement limité à l'ordre n,
> pour tout $n \geqslant 1$ entier.

5. Bien noter la différence sur les hypothèses pour les différentes formules de Taylor.

> Il y a **deux groupes** dans les formules de Taylor :
>
> **TL/TI** → hypothèse **globale** de dérivabilité : Δ^{n+1}, C^{n+1}.
> **TY** → hypothèse **ponctuelle** de dérivabilité : Δ_a^n.
>
> Il est (en général) **STUPIDE** d'utiliser TY
> avec une hypothèse globale de dérivabilité.

Exercice 36
Soit f dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec f et f'' bornées par M_0 et M_2 respectivement.
En utilisant une formule de Taylor adéquate entre x et $x+1$ (x réel), montrer que f' est bornée par un réel M_1 avec : $M_1 \leqslant 2M_0 + \dfrac{1}{2} M_2$.

Soit x réel. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+1$. Il existe c_x entre x et $x+1$ tel que :

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(c_x).$$

Ainsi il vient :

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leqslant \underbrace{|f(x+1)|}_{\leqslant M_0} + \underbrace{|f(x)|}_{\leqslant M_0} + \frac{1}{2}\underbrace{|f''(c_x)|}_{\leqslant M_2} \\ &\leqslant 2M_0 + \frac{1}{2}M_2 \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout x réel, on peut conclure que f' est bornée par un réel M_1 avec : $M_1 \leqslant 2M_0 + \frac{1}{2}M_2$

Exercice 37
Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' admettent des limites réelles en $+\infty$ que l'on note ℓ_0 et ℓ_2. Le but de l'exercice est de montrer que $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell_2 = 0$.

1. En écrivant la formule de Taylor-Intégrale à l'ordre 1 entre x et $x+1$, montrer que $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\frac{\ell_2}{2}$.
2. Démontrer que $\ell_2 = 0$.

1. Soit x réel. On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+1$. Il existe c_x entre x et $x+1$ tel que :

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(c_x).$$

On a donc : $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(c_x)$.
Mais $c_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition des limites

$$f''(c_x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2.$$

Il vient donc :

$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_0 - \ell_0 - \frac{1}{2}\ell_2 = -\frac{1}{2}\ell_2.$$

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_2 \neq 0$. Quitte à changer f et $-f$, on peut supposer que $\ell_2 > 0$.
Il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geqslant A$ on ait :

$$|f''(t) - \ell_2| \leqslant \frac{\ell_2}{2},$$

et ainsi $f''(t) \geqslant \frac{\ell_2}{2}$, valable pour tout $t \geqslant A$.
Pour tout $x \geqslant A$ on a donc $\int_A^x f''(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell_2}{2}(x-A)$ i.e.

$$f'(x) \geqslant \frac{\ell_2}{2}(x-A) + f'(A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui contredit la question précédente.

Exercice 38
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. A l'aide d'une formule de Taylor, déterminer limite de la suite (S_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant par exemple la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$ on obtient l'existence de c_n entre 0 et 1 tel que :

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}.$$

Une petite récurrence donne sans difficulté pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$. Cela amène : $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$.
Enfin $f^{(n+1)}$ est bornée par $n!$ sur $[0,1]$ d'où $\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 39
Soit f dans $\Delta^2(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$ avec f'' majorée par $M \geqslant 0$ réel. Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $0 < f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M$ et en déduire que $\left|(\sqrt{f})'\right| \leqslant \sqrt{\frac{M}{2}}$.

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+y$: il existe $c_{x,y}$ entre x et $x+y$ tel que :

$$f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2} f''(c_{x,y}).$$

Comme f est à valeurs strictement positives, il vient :

$$0 < f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2} M.$$

Le trinôme en y ci-dessus a donc un discriminant strictement négatif :

$$f'^2(x) - 2Mf(x) < 0, \quad \text{donc} \quad \frac{f'^2(x)}{4f(x)} < \frac{M}{2},$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 40 (Théorème de division dans $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$)
Soit f dans $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$.
Démontrer que la fonction $g = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{pmatrix}$ admet un prolongement C^∞ à $\mathbb{R}$ avec pour tout n entier : $g^{(n)}(0) = \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$.

• **Un cas particulier.** Supposons un instant que f est une fonction entière (i.e. la somme d'une série entière de rayon de convergence infini). On dispose alors d'une suite (a_n) dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{avec pour tout } n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Comme $f(0)=0$, il vient $a_0 = 0$ de sorte que pour tout x réel on a :

$$f(x) = x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}}_{=g(x)}.$$

Comme g est une fonction entière, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :

$$g^{(n)}(0) = a_{n+1} n! = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Hélas, il existe des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas développable en série entière au voisinage de 0.

• **Première méthode.** Pour tout x non nul on a :

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{t=xu} x \int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout x non nul, on a donc $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$. Pour $x=0$ on pose $g(0) = f'(0)$, de sorte que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$ pour tout x réel.
On utilise alors de façon répété le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (vérifier les hypothèses !) :

— La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout x réel :

$$g'(x) = \int_0^1 uf''(xu)\,\mathrm{d}u \quad \text{et ainsi} \quad g'(0) = \frac{f''(0)}{2}.$$

— La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout x réel :

$$g''(x) = \int_0^1 u^2 f^{(3)}(xu)\,\mathrm{d}u \quad \text{et ainsi} \quad g''(0) = \frac{f^{(3)}(0)}{3}$$

— etc...

• **Seconde méthode.**
La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de telles fonctions. Pour tout x non nul on a $f(x) = xg(x)$ et pour $n \geqslant 1$ entier il vient :

$$f^{(n)}(x) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x).$$

Puis si x est non nul, $n \in \mathbb{N}$, l'égalité de Taylor-Lagrange entre x et 0 fournit $c_{n,x}$ entre 0 et x tel que :

$$0 = f(0) = f(x) - xf'(x) + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{n,x}).$$

Ainsi :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \left(xg^{(k)}(x) + kg^{(k-1)}(x) \right) + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_{n,x})$$

Il reste $g^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$.
Un emploi itéré du théorème de prolongement de la dérivée permet de conclure.

Exercice 41
Il s'agit d'un énoncé plus général de celui de l'exercice 36.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n ($n \geqslant 2$ entier) telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout k dans $\{1, \dots, n-1\}$ la fonction $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit x réel. Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ on pose $a_i = i+1$. On écrit alors la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre $n-1$ entre x et $x+a_i$ (loisible car f est de classe C^n). Il existe c_i entre x et $x+a_i$ tel que :

$$f(a_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} a_i^k + \frac{f^{(n)}(c_i)}{k!} a_i^n.$$

Cela se traduit matriciellement par $Y = AX + B$ où :

$$Y = \begin{pmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^1 & \cdots & a_0^{n-1} \\ a_1^0 & a_1^1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^0 & a_{n-1}^1 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{f^{(0)}(x)}{0!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a_0^n}{n!} f^{(n)}(c_0) \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}^n}{(n)!} f^{(n)}(c_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Comme les a_i sont distincts, la matrice A est inversible, donc $X = A^{-1}(Y - B)$ et ainsi, pour tout k dans $\{1, \dots, n-1\}$, $f^{(k)}$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions bornées.