Séances de mai/juin 2023

Table des matières

1 Dénombrabilité, bijections **1**
1.1 Injection, surjection, bijection . . . 1
1.2 Généralités sur la dénombrabilité . . . 2

2 Limites des fonctions d'une variable réelle **3**
2.1 Définition de la limite . . . 3
2.2 Limite à gauche et à droite . . . 3
2.3 Limite épointée . . . 3
2.4 Monotonie et limites à droite et à gauche . . . 4
2.5 Caractérisation séquentielle de la limite . . . 4

3 Continuité **4**
3.1 Généralités . . . 4
3.2 Caractérisation séquentielle de la continuité . . . 5
3.3 Uniforme continuité . . . 6

4 Dérivabilité **6**
4.1 Définition . . . 6
4.2 Les théorèmes de Rolle . . . 7
4.3 Le théorème des accroissements finies . . . 8

5 Les formules de Taylor **8**
5.1 Les formules globales . . . 8
5.1.1 La formule de Taylor-Lagrange . . . 8
5.1.2 La formule de Taylor-Intégrale . . . 9
5.2 La formule locale . . . 9

1 Dénombrabilité, bijections

1.1 Injection, surjection, bijection

Définition 1 *Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.*

— *On dit que f est injective lorsque pour tout $(x, x') \in X^2$ on a :*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

— *On dit que f est surjective lorsque* $\operatorname{Im} f = Y$ *où* $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$.

Exercice 1
Soient X et Y deux ensembles

1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Démontrer que g est surjective et que f est injective.
2. Soit $f : X \to Y$.
   a) Démontrer que f est surjective si et seulement s'il existe $s : Y \to X$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_Y$.
   b) Démontrer que f est injective si et seulement s'il existe $r : Y \to X$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Théorème 1
Soient X et Y deux ensembles. Alors il existe une injection $f : X \to Y$ si et seulement s'il existe une surjection $g : Y \to X$.

Exercice 2
Démontrer le théorème 1.

Exercice 3
Soient X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On note $\{0,1\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$.

2. Démontrer que $\mathcal{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont en bijection.

Exercice 4

1. Trouver une bijection de $]0,1]$ sur $]0,1[$.
2. A l'aide de l'écriture décimale propre d'un réel, trouver une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[^2$.

1.2 Généralités sur la dénombrabilité

Définition 2 *Un ensemble E est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ainsi lorsque E est dénombrable on peut numéroter ses éléments et écrire $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 5

1. Démontrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. **Procédé diagonal de Cantor.** Démontrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, n'est pas dénombrable.

Théorème 2

1. *Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.*
2. *Si E est au plus dénombrable et si $f : E \to F$ est surjective alors F est au plus dénombrable.*

Exercice 6
Démontrer le théorème 2.

Exercice 7

1. Démontrer que toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.
2. Démontrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Théorème 3

1. *Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*
2. *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
3. *Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Exercice 8
Démontrer le théorème 3

Exercice 9

1. Démontrer que $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, est dénombrable.
2. Un complexe α est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et dans le cas contraire il est dit *transcendant*. Démontrer qu'il existe des nombres transcendants.

Exercice 10 (Le théorème de Cantor-Bernstein)
Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : X \to Y$ et une application injective $g : Y \to X$.
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Berstein qui affirme qu'alors X et Y sont en bijection.

1. On suppose de plus dans cette première question que $Y \subset X$. On définit alors une suite de parties de X en posant :

$$\begin{cases} X_0 = X \setminus Y \\ X_n = f(X_{n-1}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

   On pose également $\widehat{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

   a) Démontrer que l'on définit correctement une application $h : X \to Y$ en posant :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \widehat{X} \\ x & \text{si } x \in X \setminus \widehat{X} \end{cases}.$$

   b) Démontrer que h est une bijection.

2. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

2 Limites des fonctions d'une variable réelle

2.1 Définition de la limite

Définition 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, a un réel qui appartient à $\overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha_\varepsilon > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x-a| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Exercice 11
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et a est un réel qui appartient à $\overline{I}$.

1. Démontrer que lorsque f admet une limite réelle ℓ en a alors cette limite est unique. *Cela permet d'utiliser la notation* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
2. Démontrer que lorsque f admet une limite réelle ℓ en a alors f est bornée au voisinage de a.

Remarque 2.1

1. J'ai pris comme cadre une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ mais on peut tout à fait prendre une partie A quelconque de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on prend pour a un point *adhérent* à A...
2. Avec les notations de la définition 3, lorsque $a \notin I$, on dit que f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

   $$(\forall A \in \mathbb{R})\,(\exists \alpha_A > 0)\,(\forall x \in I)\,(|x-a| \leqslant \alpha_A \Rightarrow f(x) \geqslant A)\,.$$

   Il y a encore « unicité de la limite » d'où la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
3. On peu donner bien sûr des définitions équivalentes pour les notations $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$...(le faire !)

Théorème 4 (Composition des limites)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, a un élément de I ou une borne de I, b un élément de J ou une borne de J, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$. Alors :

$$g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarque 2.2
On peut aussi composer des fonctions qui ne sont pas forcément définies sur des intervalles, mais pour lesquelles les la composition est possible et les limites existent.

Exercice 12
Démontrer le théorème 4 dans le cas où a, b et ℓ sont des réels.

2.2 Limite à gauche et à droite

Définition 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, non borne de I, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a lorsque la restriction $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a.*

Remarque 2.3

1. On peut bien sûr définir des notions de limite réelle à droite, de limite infinie à droite et gauche...(le faire !).
2. Avec les notations de la définition précédente, la limite à droite en a, lorsqu'elle existe, se note :

   $$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a+0),$$

   (cette dernière notation pouvant prêter à confusion...).
3. Pour bien comprendre, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ alors f admet une limite à droite et à gauche en 0 qui sont respectivement $f(a+0) = 1$ et $f(a-0) = 0$. Mais f n'admet pas en a de limite.

2.3 Limite épointée

Définition 5 *Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite épointée en a lorsque la restriction $f|_{I\setminus\{a\}}$ admet ℓ pour limite en a.*

Remarque 2.4

1. On peut aussi parler de limite infinie épointée en a.
2. Comme pour les notions précédentes de limite, il y a unicité de la limite épointée. La notation est la suivante :

   $$\lim_{x\to a^\bullet} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a^\bullet} f$$

Exercice 13
Trouver une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que g admette une limite à droite et à gauche en 0, une limite épointée en 0, mais n'admette pas de limite en 0.

2.4 Monotonie et limites à droite et à gauche

Théorème 5
Soient $\tilde{a} < \tilde{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $f :]\tilde{a}, \tilde{b}[\to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$ alors f admet une limite (qui peut être infinie) en $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.

Démonstration. Supposons que f est croissante sur $]\tilde{a}, \tilde{b}[$. L'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ f(x) \mid x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi on, peut considérer :

$$\begin{cases} \ell & = \inf \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ L & = \sup \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

On distingue deux cas.

— **Cas 1**. Supposons que $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $L \leqslant A + \varepsilon$. Puis il existe $a \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ tel que $f(a) = A$. Si $x \geqslant a$ avec $x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ on aura, par croissance de f, $L \leqslant f(x) + \varepsilon$ de sorte que :

$$|f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{\tilde{b}} f = L$.

— **Cas 2**. On suppose que $L = +\infty$. Soit A réel. Comme $\sup \mathcal{E} = +\infty$, il existe $a \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ tel que $f(a) \geqslant A$. Par croissance de f, si $x \geqslant a$ avec $x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$, on aura $f(x) \geqslant A$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{\tilde{b}} f = +\infty$.

Tout ce qui manque se traite de la même manière. □

Corollaire 5.1
Toute fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite à droite réelle et une limite à gauche réelle en tout point de cet intervalle.

Exercice 14
Démontrer ce corollaire.

Exercice 15

1. Démontrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable.
2. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$. Pour x réel on pose :

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

   a) Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et croissante.
   b) Démontrer que tout nombre rationnel est un point de discontinuité de la fonction f.

2.5 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 6
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément de I ou une borne de I, $f : I \to \mathbb{R}$. Pour ℓ réel, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $\lim\limits_{a} f = \ell$.

(2) Pour toute suite (x_n) dans I telle que $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$ on a :

$$f(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} \ell.$$

Exercice 16
Démontrer le théorème 6.

Remarque 2.5

1. Il y a bien sur des énoncés analogues en remplaçant a par $\pm\infty$ ou ℓ par $\pm\infty$.
2. Ce théorème s'utilise souvent dans le sens (2) ⇒ (1), le sens (1) ⇒ (2) n'étant qu'une version du ***théorème de composition des limites***.

3 Continuité

3.1 Généralités

Définition 6 *Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue en a lorsque $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. La fonction f sera dite continue (sur I) lorsque f est continue en tout point de I.*

Théorème 7
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque 3.1

1. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$. Pour montrer que I est un intervalle, on montre que pour tout $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a :
$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in I.$$
Notez que $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pour λ dans $[0, 1]$ est une paramétrisation du segment d'extrémités x et y.
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont aussi exactement les *parties connexes* de $\mathbb{R}$.
2. Ce théorème est est un cas particulier d'un énoncé plus général : *l'image d'un connexe par une application continue est un connexe.*

Corollaire 7.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soient $a < b$ dans I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout y entre (au sens large) $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration. Puisque f est continue, $f([a, b])$ et un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$. □

Exercice 17
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Démontrer que f a un point fixe dans $]0, 1[$.

Théorème 8 (Weierstraß)
L'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment. En particulier, si $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 3.2
C'est un cas particulier d'un énoncé plus général : *l'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Exercice 18
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite réelle ℓ en $+\infty$. Démontrer que f est bornée.

3.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 9
Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) *f est continue en a.*
(2) *Pour tout suite (x_n) dans I telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$, on a : $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

Démonstration. C'est une simple traduction de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Remarque 3.3
Ce théorème, qui se généralise à des applications entre espaces métriques, sert souvent à démontrer que des applications sont ou ne sont pas continues en a. Dans ce dernier, on exhibe une suite (x_n) telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ mais $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exercice 19
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Démontrer que f est continue en 0 si et seulement $\exists \lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$.
2. Ce dernier résultat est-il toujours vrai si f n'est plus supposée croissante ?

Exercice 20
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. On suppose que g est décroissante. Démontrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 21
Trouver toutes les fonctions continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on ait :
$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

3.3 Uniforme continuité

Définition 7 *Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha_\varepsilon > 0)\,\left(\forall (x,y) \in I^2\right)\,(|x-y| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

Remarque 3.4
Une application uniformément continue « ne peut avoir des variations trop brusques ».

Exercice 22
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne.
Démontrer que f est uniformément continue sur I.

Théorème 10 (Heine)
Toute application continue sur un segment est uniformément continue.

Exercice 23
Démontrer le théorème 10.

Exercice 24
Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est uniformément continue sur I.
(ii) Pour toutes les suites (u_n) et (v_n) dans I qui vérifient $|u_n - v_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $|f(u_n) - f(v_n)| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 25
1. Démontrer que la fonction $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $[0,1]$ mais pas lipschitzienne sur cet intervalle.
2. Démontrer que $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 26 (Débordement)
1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\exists \lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que f est uniformément continue.
2. Démontrer que $\sqrt{\ }$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soient T un réel strictement positif, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer qu'il existe a et b réels tels que pour tout x réel on ait :

$$|f(x)| \leqslant ax + b.$$

4 Dérivabilité

4.1 Définition

Définition 8 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Lorsque $a \in I$, on dit que f est dérivable en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

   Ce nombre ℓ se note alors $f'(a)$.

2. *On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. On peut alors définir une fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui est la fonction dérivée de f sur I.*

Théorème 11
Soient $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Exercice 28
Démontrer le théorème 11

4.2 Les théorèmes de Rolle

Théorème 12
*Soient $a \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ avec a **non borne de** I, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Si f admet en a un extremum local alors $f'(a) = 0$.*

Remarque 4.1

1. Le fait que a soit non borne de I est essentiel : prendre comme contre-exemple la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1 - x$ et $a = 0$.
2. Il n'y a pas de réciproque à ce théorème : prendre la fonction cube et $a = 0$.
3. En fait, seul la dérivabilité de f à l'intérieur de I importe comme va le montrer la démonstration.

Démonstration. Supposons que f admette en a un maximum local. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha] \subset I$ et tel que $f\,|_{[a-\alpha,a+\alpha]}$ admette en a un maximum. Si $x \in]a, a + \alpha]$ alors $f(x) \leqslant f(a)$ donc :

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\longrightarrow \\ x \to a^+}} \leqslant 0.$$

Il en résulte que $f'(a) \leqslant 0$. En considérant maintenant x dans $[a - \alpha, a[$, on montre de la même manière que $f'(a) \geqslant 0$. □

Théorème 13 (Rolle)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur segment $[a, b]$: elle admet donc son maximum M et un minimum m.

— Si $M = m = 0$ alors f est constante sur $[a, b]$ et $f' = 0$ sur $[a, b]$.
— Sinon, on a $m < M$ et l'un des deux est atteint en un point c dans $]a, b[$. D'après le théorème 12 on a alors $f'(c) = 0$.

□

Remarque 4.2
L'énoncé de ce théorème est encore valable, comme le montre la démonstration, lorsque f est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$.

Exercice 29
Soient $n \geqslant 2$ entier et $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, qui admet n racines réelles distinctes. Démontrer que P' admet $n - 1$ racines réelles distinctes.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les racines de P rangées dans l'ordre strictement croissant. Fixons i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. La fonction polynomiale P est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$. De plus $P(a_i) = P(a_{i+1})$: le théorème de Rolle s'applique. Il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. Comme :

$$b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n,$$

le polynôme P' admet $n - 1$ racines distinctes. □

Exercice 30
Soient α un réel, f dans $\Delta^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ ayant $n \geqslant 2$ zéros. On considère la fonction $g : x \mapsto \alpha f(x) + f'(x)$. Démontrer que g admet au moins $n - 1$ zéros.

Exercice 31
Soit f dans $C^3([0, 2], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

1. Soit λ réel et $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par : $g(t) = f(t) - \frac{1}{6}t(t-1)(t-2)\lambda$. Déterminer $g_\lambda^{(3)}(t)$ pour t dans $[0, 2]$.
2. En choisissant λ de manière subtile dans la question précédente, démontrer que pour tout x dans $[0, 2]$ il existe c_x dans $[0, 2]$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)f^{(3)}(c_x)$$

Exercice 32
Soient $a < b$ réels et f dans $\Delta^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 33
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 10x^2 \sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Tracer, avec les outils que vous souhaitez (logiciel lambda, imprimante...), le graphe de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Démontrer que f est dérivable en 0 avec $f'(0) > 0$.
4. Démontrer que f n'est pas croissante au voisinage de 0 i.e. que pour tout $r > 0$, f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-r, r]$.
5. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

4.3 Le théorème des accroissements finies

Théorème 14 (Accroissements finis ponctués)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors c entre a et b tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

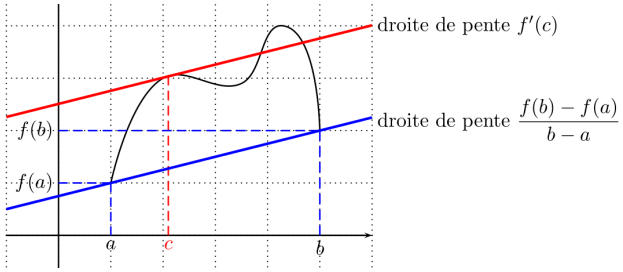


FIGURE 1 – Illustration des accroissements finis

Remarque 4.3
1. Dans la pratique f est dérivable sur $[a, b]$.
2. Ce théorème dit qu'il existe un point de la courbe (au moins) où la tangente (dont l'existence est assurée par le caractère dérivable de f) est parallèle à la droite passant par les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.
3. Si de plus la dérivée de f est bornée par un réel M sur $]a, b[$, on obtient ***l'inégalité des accroissements finis*** :

$$|f(a) - f(b)| \leqslant M\,|b - a|\,.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in [a, b]$, par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x) + f(a).$$

Cette fonction est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie : $\varphi(a) = \varphi(b)$. Selon le théorème de Rolle, il existe c dans $]a, b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$.
Comme pour tout x dans $]a, b[$ on a $\varphi'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x)$, le théorème des accroissements finis est prouvé. □

Exercice 34 (Théorème de Darboux)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
1. Soient $\alpha \leqslant \beta$ dans $f'(I)$, $\lambda \in [\alpha, \beta]$ ainsi que a et b dans I tels que $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$. On suppose que $a < b$. On considère les fonctions :

$$\varphi = \begin{pmatrix}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{pmatrix} \text{ et } \psi = \begin{pmatrix} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que l'on a : $\lambda \in \operatorname{Im}\varphi$ ou $\lambda \in \operatorname{Im}\psi$.
2. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

5 Les formules de Taylor

5.1 Les formules globales

5.1.1 La formule de Taylor-Lagrange

Théorème 15 (Taylor-Lagrange)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, n entier, f dans $C^n([a, b], \mathbb{R})$ avec f Δ^{n+1} sur $]a, b[$. Il existe alors c dans $]a, b[$ tel que :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

Remarque 5.1
1. Pour $a = 0$, il s'agit de la formule de TAYLOR-MACLAURIN.
2. L'ordre de a et b n'a à posteriori pas d'importance.
3. Par exemple, pour $n = 2$ on a donc l'existence de c entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{6} f^{(3)}(c)$$

4. Bien comprendre que c dépend de n de a et de b.

5. **Inégalité de Taylor-Lagrange**
Lorsque $f^{(n+1)}$ est bornée par M sur $]a,b[$ on a alors l'inégalité de Taylor-Lagrange *:*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Démonstration. Soit A le réel tel que : $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$.
On considère la fonction auxiliaire φ, définie sur $[a,b]$, par :

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. De plus φ est dérivable sur $]a,b[$, et si $x \in]a,b[$, on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A = \frac{(b-x)^n}{n!} \left[A - f^{(n+1)}(x) \right].$$

Le théorème de Rolle (théorème 13) affirme alors l'existence de c dans $]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ ce qui prouve la formule. □

5.1.2 La formule de Taylor-Intégrale

Théorème 16 (Taylor-Intégrale)
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et f dans $C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a alors :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}$$

Remarque 5.2
1. Cela généralise le résultat bien connu : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t$.
2. Pour $n = 1$ cela donne : $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t) f''(t)\, \mathrm{d}t$
3. On utilise souvent la formule de Taylor-Intégrale en se ramenant par changement de variable affine à une fonction f définie sur $[0,1]$, ce qui donne à l'ordre 1 :
$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t)\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. On considère la fonction auxiliaire $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par : $\psi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
La fonction ψ est C^1 sur $[a,b]$. Pour x dans $[a,b]$ on a : $\psi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$.
On écrit alors $\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \psi'(x)\, \mathrm{d}x$ ce qui donne immédiatement le résultat. □

Exercice 35
Démontrer que les fonctions polynômes de degré $\leqslant n$ sur un intervalle I non réduit à un point sont exactement les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telles que $f^{n+1} = 0$ sur cet intervalle.

5.2 La formule locale

Théorème 17 (Taylor-Young)
Soient $a \in I$ intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$, f dans $\Delta_a^n(I,\mathbb{R})$. Il existe alors une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et, pour x proche de a,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}(x-a)^n}.$$

Cette égalité s'appelle la formule de Taylor-Young à l'ordre n en a.

Démonstration. On fait une récurrence sur $n \geqslant 1$ pour démontrer la propriété suivante :
Dès que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f \in \Delta_a^n(I,\mathbb{R})$ il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et, pour x proche de a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

— Si $n = 1$, c'est l'identité de la dérivée.

— On suppose que le résultat est valable pour un certain $n \geqslant 1$ entier. Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \Delta_a^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $g = f'$ est dans $\Delta_a^n(I, \mathbb{R})$: on peut lui appliquer l'hypothèse. Il existe ainsi $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ nulle et continue en a telle que :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{=u(x)}. \end{aligned}$$

Pour x proche de a, on pose $U(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

On a : $U'(x) = u(x)$ et $U(a) = 0$. Puis, soit $\delta > 0$. Comme ε est nulle et continue en a, il existe $\gamma > 0$ tel que $|\varepsilon(x)| \leqslant \delta$ dès que $|x - a| \leqslant \gamma$. Ainsi :

$$|U'(x)| \leqslant \delta (x-a)^n \quad \text{si } |x-a| \leqslant \delta.$$

Si, par exemple, on a $a \leqslant x \leqslant a + \gamma$, il vient en intégrant entre a et x :

$$|U(x) - U(a)| \leqslant \frac{\delta (x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Dans tous les cas on obtient : $|U(x) - U(a)| \leqslant \dfrac{\delta |x-a|^{n+1}}{n+1}$.

On pose alors $\zeta(x) = \dfrac{U(x)}{(x-a)^{n+1}}$ si $x \neq a$ et $\zeta(a) = 0$. Ce qui précède assure que ζ est continue en a. Ainsi la propriété est varie au rang $n+1$.

Autre preuve. Pour $n \geqslant 0$ on pose, pour x dans I distinct de a :

$$R_n(x) = \frac{\overbrace{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}^{=\varphi(x)}}{\underbrace{(x-a)^n}_{=\psi(x)}}.$$

On veut démontrer que $\lim_{x \to a} R_n(x) = 0$ ce que l'on obtient par applications successives de la règle de l'hôpital, puisque : $\lim_{x \to a} \dfrac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)} = 0$. □

Remarque 5.3

1. Pour $n = 1$ on retrouve l'identité de la dérivée.
2. L'hypothèse f dans $\Delta_a^n(I, \mathbb{R})$ signifie en fait : f dérivable au voisinage de a, f' dérivable au voisinage de a,..., $f^{(n-2)}$ dérivable au voisinage de a et $f^{(n-1)}$ dérivable en a.
3. Pour la preuve, on procède ici par récurrence.
4. Si on peut écrire la formule à l'ordre n de Taylor-Young pour une fonction f en a alors f admet, en a, un développement limité à l'ordre n (avec réciproque uniquement lorsque $n = 1$). Ainsi :

> Une fonction C^∞ sur un intervalle I
> admet en tout point de I un développement limité à l'ordre n,
> pour tout $n \geqslant 1$ entier.

5. Bien noter la différence sur les hypothèses pour les différentes formules de Taylor.

> Il y a **deux groupes** dans les formules de Taylor :
>
> **TL/TI** → hypothèse **globale** de dérivabilité : Δ^{n+1}, C^{n+1}.
> **TY** → hypothèse **ponctuelle** de dérivabilité : Δ_a^n.
>
> Il est (en général) **STUPIDE** d'utiliser TY
> avec une hypothèse globale de dérivabilité.

Exercice 36
Soit f dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec f et f'' bornées par M_0 et M_2 respectivement.
En utilisant une formule de Taylor adéquate entre x et $x+1$ (x réel), montrer que f' est bornée par un réel M_1 avec : $M_1 \leqslant 2M_0 + \dfrac{1}{2} M_2$.

Exercice 37
Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' admettent des limites réelles en $+\infty$ que l'on note ℓ_0 et ℓ_2. Le but de l'exercice est de montrer que $\exists \lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell_2 = 0$.

1. En écrivant la formule de Taylor-Intégrale à l'ordre 1 entre x et $x+1$, montrer que $\exists \lim_{x \to +\infty} f'(x) = -\dfrac{\ell_2}{2}$.

2. Démontrer que $\ell_2 = 0$.

Exercice 38
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. A l'aide d'une formule de Taylor, déterminer limite de la suite (S_n).

Exercice 39
Soit f dans $\Delta^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ avec f'' majorée par $M \geqslant 0$ réel. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $0 < f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M$ et en déduire que $\left|(\sqrt{f})'\right| \leqslant \sqrt{\frac{M}{2}}$.

Exercice 40 (Théorème de division dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)
Soit f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
Démontrer que la fonction $g = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{x} \end{pmatrix}$ admet un prolongement C^∞ à $\mathbb{R}$ avec pour tout n entier : $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)$.

Exercice 41
Il s'agit d'un énoncé plus général de celui de l'exercice 36.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n ($n \geqslant 2$ entier) telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout k dans $\{1, \ldots, n-1\}$ la fonction $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.