Approximation d'intégrales

Le but est de voir différentes méthodes de calcul approché d'intégrale et d'estimer la valeur de l'erreur commise. Le cadre est le suivant : $a < b$ dans $\mathbb{R}$, f est une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ suffisamment régulière (disons de classe C^4). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ on pose :

$$\begin{cases} h = \dfrac{a-b}{n} \\ a_i = a + ih \end{cases}.$$

En notant, pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $I_i = \displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} I_i$.

On cherche alors à approcher sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ la fonction f par une fonction polynomiale P_i :

— de degré 0 (méthode des rectangles) ;
— de degré 1 (méthode des trapèzes) ;
— de degré 2 (méthode de Simpson).

Pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$, on pose $J_i = \displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_i(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} J_i$.

1. **Méthode des rectangles** (point milieu).
   Pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$ on prend $P_i(x) = f\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$. Posons $\|f''\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
   a) Soit $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Démontrer l'existence de ξ_i entre a_i et a_{i+1} tel que :
   $$I_i = hf\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + \frac{h^3}{24} f''(\xi_i).$$
   b) Démontrer que $|I - J| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}\ \|f''\|_\infty$.

2. **Méthode des trapèzes**. Pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$ on prend $P_i(x) = f(a_i) + \dfrac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{h}(x - a_i)$, de sorte que J_i est l'aire d'un trapèze.
   a) Soit $i \in \{0,\dots,n-1\}$. Démontrer l'existence de ξ_i entre a_i et a_{i+1} tel que :
   $$I_i = \frac{h}{2}\big(f(a_i) + f(a_{i+1})\big) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i).$$
   b) Démontrer que $|I - J| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\ \left\|f''\right\|_\infty$.

3. **Méthode de Simpson**.
   Pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$ on prend ici la fonction polynôme P_i de degré 2 qui interpole f en a_i, $\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ et a_{i+1}.
   a) Déterminer P_i pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$.
   b) Soient $a > 0$, $g :]-a, a[\to \mathbb{R}$, impaire, de classe Δ^5. Démontrer que pour tout x réel tel que $|x| < a$ il existe ξ_x entre 0 et x tel que :
   $$g(x) = \frac{x}{3}\big(g'(x) + 2g'(0)\big) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi_x).$$
   c) Démontrer que pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$, il existe ξ_i entre a_i et a_{i+1} tel que :
   $$I_i = \frac{h}{6}\big(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f(\tfrac{a_i + a_{i+1}}{2})\big) - \frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i).$$
   d) Démontrer que $|I - J| \leqslant \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}\ \left\|f^{(4)}\right\|_\infty$.

1. a) Posons $\alpha_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$. On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour $F : x \mapsto \displaystyle\int_{a_i}^{x} f(t)\,dt$ à l'ordre 2 entre a_i et α_i puis entre α_i et a_{i+1} (c'est loisible puisque f est suffisamment régulière).
Il existe alors $c_1 \in]a_i, \alpha_i[$ et $c_2 \in]\alpha_i, a_{i+1}$ tels que :

$$\begin{cases} F(a_i) - F(\alpha_i) & = -\frac{h}{2}F'(\alpha_i) + \frac{h^2}{8}F''(\alpha_i) - \frac{h^3}{48}F'''(c_1) \\ F(a_{i+1}) - F(\alpha_i) & = \frac{h}{2}f(\alpha_i) + \frac{h^2}{8}f'(\alpha_i) + \frac{h^3}{48}f''(c_2) \end{cases}$$

Par différence, il vient :

$$F(a_{i+1}) - F(a_i) = hf(\alpha_i) + \frac{h^3}{48}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big).$$

Comme f'' possède la propriété des valeurs intermédiaires, on peut conclure qu'il existe ξ_i entre a_i et a_{i+1} tel que $\dfrac{1}{2}\big(f''(c_1) + f''(c_2)\big) = f''(\xi_i)$.
Ainsi : $I_i = hf\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) + \dfrac{h^3}{24}f''(\xi_i)$.

b) Petit calcul, sachant que $J_i = hf\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)\ldots$

2. a) Soit λ le réel tel que : $I_i - \dfrac{h}{2}\big(f(a_i) + f(a_{i+1})\big) = h^3\lambda$.
On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{a_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x - a_i}{2}\big(f(a_i) + f(x)\big) - (x - a_i)^3\lambda$.
Cette fonction est de classe C^3 sur $[a_i, a_{i+1}]$ et on a, pour $x \in [a_i, a_{i+1}]$:

$$\begin{cases} \varphi'(x) & = f(x) - \frac{1}{2}\big(f(a_i) + f(x)\big) - \frac{x-a_i}{2}\, f'(x) - 3(x - a_i)^2\lambda \\ \varphi''(x) & = f'(x) - \frac{1}{2}\, f'(x) - \frac{1}{2}\, f'(x) - \frac{x-a_i}{2}\, f''(x) - 6(x - a_i)\lambda \\ & = -\frac{1}{2}(x - a_i)\big(f''(x) + 12\lambda\big) \end{cases}$$

Il vient donc $\varphi'(a_i) = 0$ et en écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 pour φ entre a_i et a_{i+1}, il existe $\xi_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que :

$$\underbrace{\varphi(a_{i+1}) - \varphi(a_i)}_{=0} = \frac{h^2}{2}\,\varphi''(\xi_i).$$

Ainsi $f''(x_i) = -12\lambda$.

b) Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $I_i - J_i = I_i - \dfrac{h}{2}\big(f(a_i) + f(a_{i+1})\big)$. De là :

$$|I - J| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |I_i - J_i| \leqslant n \times \frac{h^3}{12}\,\|f''\|_\infty = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\|f''\|_\infty$$

3. a) Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. On pose encore $\alpha_i = \dfrac{a_i + a_{i-1}}{2}$.
On a pour x réel :

$$P_i(x) = f(a_i)L_1(x) + f(\alpha_i)L_2(x) + f(a_{i+1}L_3(x) \tag{1}$$

où L_1, L_2, L_3 sont les interpolateurs élémentaires de Lagrange de degré 2 i.e vérifient :

$$\begin{cases} L_1(a_i) = 1,\ L_1(\alpha_i) = 0,\ L_1(a_{i+1}) = 0 \\ L_2(a_i) = 0,\ L_2(\alpha_i) = 1,\ L_2(a_{i+1}) = 0 \\ L_3(a_i) = 0,\ L_3(\alpha_i) = 0,\ L_3(a_{i+1}) = 1 \end{cases}$$

Le reste est pour le lecteur.

b) Soit x réel tel que $|x| < a$. Si $x = 0$, pas de souci. Supposons que x soit non nul. On considère le réel α tel que :

$$g(x) - \frac{x}{3}\big(g'(x) + 2g'(0)\big) + \frac{\alpha x^5}{180} = 0.$$

On considère encore la fonction auxiliaire $h :]-a, a[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = g(t) - \frac{t}{3}\big(g'(t) + 2g'(0)\big) + \frac{\alpha t^5}{180} = 0.$$

Cette fonction h vérifie $h(x) = h(0) = 0$. De plus h est de classe Δ^4 sur $]-a, a[$ et on a :

$$\begin{cases} 3h'(t) & = 3g'(t) - \big(g'(t) + 2g'(0)\big) - tg''(t) + \dfrac{\alpha}{12}t^4 \\ 3h''(t) & = g''(t) - tg^{(3)}(t) + \dfrac{\alpha}{3}t^3 \\ 3h^{(3)}(t) & = -tg^{(4)}(t) + \alpha t^2 \\ 3h^{(4)}(t) & = -g^{(4)}(t) - tg^{(5)}(t) + 2\alpha t \end{cases}$$

On a ainsi $h'(0) = h''(0) = h^{(3)}(0) = 0$.
Il existe alors c entre 0 et x (Taylor-Lagrange entre 0 et x à l'ordre 3 pour h) tel que : $h^{(4)}(c) = 0$.
On a alors $2\alpha = g^{(4)}(c) + cg^{(5)}(c)$. Mais les accroissements finis ponctués fournissent d entre 0 et c tel que :

$$g^{(4)}(c) = g^{(4)}(c) - g^{(4)}(0) = cg^{(5)}(d).$$

Par valeurs intermédiaires (Darboux !) il existe ξ_x entre c et d tel que :

$$g^{(5)}(\xi_x) = \frac{1}{2}\left(g^{(5)}(c) + g^{(5)}(d)\right).$$

Il vient alors $\alpha = g^{(5)}(\xi_x)$.

c) Lorsque $c > 0$ et $\varphi : [-c, c] \to \mathbb{R}$ est de classe C^5, la fonction $g : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(-x)$ est impaire. La question précédente donne ξ entre 0 et c tel que :

$$\varphi(c) - \varphi(-c) = \frac{c}{3}\big(\varphi'(c) + \varphi'(-c) + 4\varphi'(0)\big) - \frac{c^5}{180}\big(\varphi^{(5)}(\xi) + \varphi^{(5)}(-\xi)\big).$$

On fixe i dans $\{0, \ldots, n-1\}$ et on prend $c = \dfrac{a_{i+1} - a_i}{2} = \dfrac{h}{2}$ et $\varphi : x \mapsto F\left(x + \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$ où $F : x \mapsto \displaystyle\int_{a_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Il vient :

$$I_i = \frac{h}{6}\big(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f(\tfrac{a_i + a_{i+1}}{2})\big) - \frac{h^5}{2880}f^{(4)}(\xi).$$

d) Pour i dans $\{0, \ldots, n-1\}$ on a $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} P_i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{6}\big(f(a_i) + f(a_{i+1}) + 4f(\tfrac{a_i + a_{i+1}}{2})\big)$, petit calcul que l'on peut faire en utilisant l'expression 1, sans calculer forcément P_i. Tout est alors limpide…