# Exercices sur les suites, une correction

## Table des matières

1 Exercices « de base » 1

2 Exercices « plus sophistiqués » 6

3 Un petit problème 10

## 1 Exercices « de base »

**Exercice 1**
*On s'embrouille dans la définition de la convergence ?* Soit $(u_n)$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Traduire sur $(u_n)$ chacun des énoncés qui suivent, tous obtenus par « mélanges » à partir de la définition de $u_n \to \ell$ :

1. $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
2. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
4. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \leq n, |u_N - \ell| \leq \varepsilon$.
5. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \leq n, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

1. Cet énoncé signifie qu'à partir d'un certain rang la suite $u_n$ vit dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon > 0$ (pour une suite complexe cela signifierait que la suite vit dans le disque fermé de centre $\ell$ et de rayon $\varepsilon$ à partir d'un certain rang).
2. Cet énoncé signifie que la suite $u_n$ est constante de valeur $\ell$ à partir du rang $N$. En effet si $n \geqslant N$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc $|u_n - \ell| = 0$ (c'est aussi le cas pour une suite complexe). **Ici $N$ ne dépend pas du choix de $\varepsilon$**, comme c'est le cas dans la définition de la convergence.
3. Cet énoncé signifie exactement que la suite $u_n$ converge vers $\ell$.
4. Cet énoncé n'assure pas grand chose : l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon$, contient au moins un terme de la suite $u_n$.
5. Cet énoncé signifie que la suite $u_n$ vit dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon$.

**Exercice 2**
Pour tout entier $n > 0$ on note $u_n$ le chiffre des unités de $7^{n^2}$. Trouver :

$$a = 0, u_1 u_2 u_3 \dots$$

On a $u_1 = 7$ et $7^4 = 2401$ donc $u_2 = 1$.
• Si $n$ est pair, $n = 2p$ alors on a :

$$7^{n^2} = 7^{4p^2} = (2401)^{p^2} \quad \text{donc} \quad u_{2p} = 1.$$

• Si maintenant $n$ est impair, $n = 2p + 1$ on a alors

$$7^{n^2} = 7^{4p^2+4p+1} = (2401)^{p^2+p} \times 7 \quad \text{donc} \quad u_{2p+1} = 7.$$

Il en résulte que $a = 0, \overline{71}$ et ainsi $a = \dfrac{71}{99}$.

**Commentaire.** Pour trouver l'écriture rationnelle de $a$, on fait $100a - a = 71\dots$Via cette technique on voit alors que tout réel qui présente une période au niveau de son développement décimal est un rationnel. En particulier :

$$0, \overline{9} = 1.$$

**Exercice 3**
Soit $(u_n)$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)$ converge si et seulement si $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent.

• Si $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors toute suite extraite de $u$ converge vers $\ell$.
En particulier les suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent vers $\ell$.

• Réciproquement, on suppose que $u_{2n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \mathbb{R}$, $u_{2n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u_{3n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_1$ et $N_3$ entiers naturels tels que :

— $(\forall n \geqslant N_1)(|u_{2n} - \ell_1| \leqslant \varepsilon)$ ;
— $(\forall n \geqslant N_3)(|u_{3n} - \lambda| \leqslant \varepsilon)$ ;

Dès que $n \geqslant \max(N_1, N_3)$ on a alors $3n \geqslant N_1$ et $2n \geqslant N_3$, donc :

$$|\ell_1 - \lambda| \leqslant |\ell_1 - u_{6n}| + |u_{6n} - \lambda| \leqslant 2\varepsilon.$$

L'inégalité $|\ell_1 - \lambda| \leqslant 2\varepsilon$ étant valable quelque soit le choix de $\varepsilon > 0$, il vient $\lambda = \ell_1$.

On montre maintenant que $\ell_2 = \lambda$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$ on ait :

$$|u_{2n+1} - \ell_2| \leqslant \varepsilon.$$

Si $n \geqslant \max(N_2, N_3)$ on a alors $3n+1 \geqslant N_2$ et $2n+1 \geqslant N_3$ donc :

$$|\ell_2 - \lambda| \leqslant \left|\ell_2 - u_{2(3n+1)+1}\right| + \left|u_{3(2n+1)} - \lambda\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Il vient donc $\ell_2 = \lambda$.
Ainsi les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers $\lambda$ : il en va de même de la suite $(u_n)$.

**Exercice 4**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1 - \sin\dfrac{x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et que cette solution est dans $[0;1]$ ; on note $x_n$ cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $(x_n)$ est monotone.

1. Fixons $n \geqslant 1$ entier.

• La fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour $x \geqslant 0$ on a :

$$f_n'(x) = 2 - \frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}$$

Or pour $x \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant \cos\frac{x}{n} \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n}\cos\frac{x}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ ce qui amène :

$$f'(x) \geqslant 2 - \frac{1}{n} > 0$$

La fonction $f_n$ est donc strictement croissante.

• Puis on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1 - \sin\frac{1}{n} \geqslant 0$. Comme $f$ est **continue** (car dérivable), le **théorème des valeurs intermédiaires** assure qu'il existe $x_n$ dans l'intervalle $]0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Enfin $f_n$ est **strictement croissante** donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$ entier on a :

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{x_n}{n}\right) \qquad (\clubsuit)$$

Mais la suite $x_n$ est **bornée** donc $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 0$ et ainsi en utilisant $(\clubsuit)$, par continuité de la fonction sinus, on obtient :

$$\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}}$$

3. Question qui demande de l'initiative...Avec une babasse on se rend vite compte que les premiers termes de la suite décroissent...
• Soit $n \geqslant 1$ entier et $x$ dans $[0,1]$. On a $\dfrac{x}{n} > \dfrac{x}{n+1}$. Mais $\dfrac{x}{n}$ et $\dfrac{x}{n+1}$ appartiennent aussi à $[0,1]$ et sur cet intervalle la fonction sin est strictement croissante : il en résulte que :

$$\sin\frac{x}{n} > \sin\frac{x}{n+1}$$

et ainsi on obtient de suite

$$\boxed{f_n(x) < f_{n+1}(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [0,1]} \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

• Supposons qu'il existe $N$ entier naturel que $x_N \leqslant x_{N+1}$. On a alors en utilisant la définition de la suite $x_n$, la monotonie de chacune des fonction $f_n$ ainsi que (♣♣) :

$$0 = f_N(x_N) \leqslant f_N(x_{N+1}) < f_{N+1}(x_{N+1}) = 0$$

ce qui est une superbe contradiction. On peut donc conclure que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a :

$$x_n > x_{n+1}$$

et la suite $x_n$ **décroît strictement**.

**Exercice 5**
On considère les suites $u$, $v$ et $w$ définies pour $n \geqslant 1$ entier par :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{nn!} \\ w_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \end{aligned}$$

1. Démontrer que les suites $u$ et $v$ sont adjacentes. On appellera $\ell$ leur limite commune.
2. A l'aide de la formule de Taylor-intégrale appliquée à l'exponentielle, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{n!(n+1)} \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!(n+1)}.$$

3. Démontrer que la suite $(w_n)$ croît strictement vers e.

1. Pour le lecteur...
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x$ réel on a (formule de Taylor-intégrale à l'ordre $n$ appliquée à bon droit) :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

En particulier, avec $x = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{e} - u_n &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \underbrace{\mathrm{e}^t}_{\leqslant \mathrm{e}} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^n \, \mathrm{d}t}_{= \frac{1}{n+1}} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)n!} \end{aligned}$$

En minorant exp par 1 sur $[0,1]$ on obtient l'inégalité $\dfrac{1}{n!(n+1)} \leqslant u_n$.
Avec la question précédente, on peut assurer que $\ell = \mathrm{e}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha = \max(-a, 0)$. On considère la fonction :

$$f_a = \begin{pmatrix} ]\alpha, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x \end{pmatrix}.$$

En dérivant deux fois $g_a = \ln f_a$ on voit que $f_a$ est strictement croissante.
Enfin on a déjà vu que $f_a(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$ (passer au log et prendre un équivalent...).

**Exercice 6**
Soit $a > 0$.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que l'on définit correctement une suite $(u_n)$ en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.
2. Etudier la suite $(u_n)$.

1. On considère la fonction $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

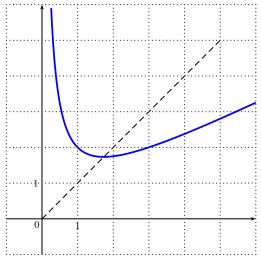


FIGURE 1 – Graphe de $f$ pour $a = 3$

Une étude de fonction montre que $f(]0,+\infty[) = [\sqrt{a},+\infty[ \subset ]0,+\infty[$. Comme $u_0 = a > 0$, on définit donc correctement une suite $(u_n)$ en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puisque $f(]0,+\infty[) = [\sqrt{a},+\infty[$. Soit $n \geqslant 1$ entier. On a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \geqslant 0.$$

Ainsi la suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang 1 et est minorée par $\sqrt{a}$ : elle converge vers $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

Comme,pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ continue sur $]0,+\infty[$, $\ell$ qui appartient à $]0,+\infty[$ est un point fixe de $f$. On trouve $\ell = \sqrt{a}$.

**Commentaire.** C'est **la méthode de Héron** pour approcher la valeur de $\sqrt{a}$. Derrière, il y a **la méthode d'Euler** pour approcher les solutions d'une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f$ est dérivable. J'explique cela.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'$ ne s'annule pas et telle que l'équation $f(x) = 0$ admette une solution unique $x_0$.

Pour approcher la solution de cette équation, on définit une suite $(u_n)$ en posant (faire une figure !!!!!)

— $u_0$ =un réel quelconque (bien choisi en fait...) ;
— $u_{n+1}$ =l'abscisse du point d'intersection de la tangente au graphe $\mathcal{C}_f$ de $f$ au point d'abscisse $u_n$ avec l'axe des abscisses.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $u_n$ a pour équation :

$$y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n).$$

Il vient donc $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \mapsto -\dfrac{f(x)}{f'(x)} + x$. Pour avoir la suite de la méthode de Héron, on prend $f(x) = x^2 - a$...

**Exercice 7 (Moyenne arithmético-géométrique)**
Soient $a$ et $b$ des réels tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a,\ v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array} \right\} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1. Montrer que ces relations définissent bien les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et qu'elles ont même limite.
3. Que se passe-t-il lorsque $b = 0$ ? lorsque $a = b$ ?

1. On montre par récurrence la propriété suivante : « $u_n$ et $v_n$ existent et sont positifs. »...

2. On montre que $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n$, puis que $(u_n)$ décroît et $v_n)$ croît : ces deux suites convergent donc vers $\ell$ et $\lambda$ respectivement. Avec la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ on obtient $\ell = \lambda$.
3. • Si $a = b$ ces deux suites sont constantes.

**Interprétation géométrique.** Soit $A$ et $B$ les points d'abscisses respectives $u_n$ et $v_n$. Soit $\Omega$ le centre du cercle de diamètre $[A, B]$ : son abscisse est $u_{n+1}$. Soit $T$ le point d'intersection d'une des tangentes au cercle issue de $O$.

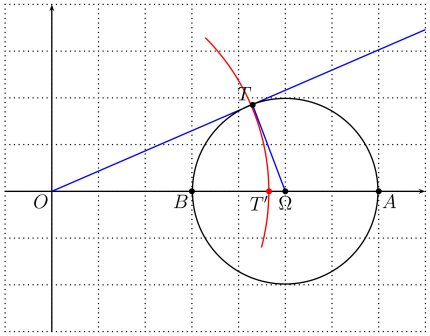



FIGURE 2 – Moyenne arithmético-géométrique

On a alors $\Omega T^2 = \Omega A \times \Omega B$.

En effet $O\Omega^2 = \Omega T^2 + OT^2$ donc :

$$\Omega T^2 = \Omega O^2 - OT^2 = (\Omega O - OT) \times (\Omega O + OT).$$

Ainsi $T'$ a pour abscisse $v_{n+1}$, où $T'$ est le point d'intersection du cercle de centre $O$ et de rayon $OT$.

**Exercice 8 (Approximation décimale d'un réel)**
On rappelle qu'un nombre décimal est un réel de la forme $\alpha 10^{-n}$ où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre décimal* $u_n(x) = \mathbf{E}(10^n x).10^{-n}$ ***est appelé approximation décimale par défaut de*** $x$ ***à*** $10^{-n}$ ***près.*** *La suite* $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *ainsi définie est appelée* ***la suite des approximations décimales par défaut de*** $x$.

   a. Donner les 5 premiers termes de l'approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$, de $\frac{2}{3}$,de $-\frac{2}{3}$. Que dire de la suite des approximations décimales par défaut d'un nombre entier relatif ? D'un nombre décimal ?
   b. Montrer que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leqslant x < u_n(x) + 10^{-n}$.
   d. En déduire que $u_n(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$.

2. On définit, de même : *pour tout $n \in \mathbb{N}$,* ***l'approximation décimale par excès de*** $x$ ***à*** $10^{-n}$ ***près*** *: c'est le nombre décimal* $v_n(x) = u_n(x) + 10^{-n}$ *;* ***la suite des approximations décimales par excès de*** $x$ *: c'est la suite* $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrer que les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1. a. • $u_n(x)$ est la troncature au $n$-nième chiffre après la virgule de l'écriture décimale de $x$.
   • Si $x$ est un entier ou un nombre décimal alors il existe $N_0$ entier tel que $10^{N_0}x$ soit entier. Alors pour tout $n \geqslant N_0$ on aura $u_n(x) = 10^{N_0}x$ et cette suite est constante à partir d'un certain rang (dans le cas d'un entier elle est même constante).

   b. Soit $n$ entier. Par définition de la partie entière d'un réel on a :
   $$\mathbf{E}(10^n x) \leqslant 10^n x$$
   Donc
   $$\underbrace{10.\mathbf{E}(10^n x)}_{\in\mathbb{Z}} \leqslant 10^{n+1}x$$
   Mais la partie entière est croissante d'où :
   $$10.\mathbf{E}(10^n x) \leqslant \mathbf{E}\left(10^{n+1}x\right)$$
   ce qui donne immédiatement en multipliant par $10^{-n-1}$ : $\boxed{u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x)}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière :
   $$\mathbf{E}(10^n x) \leqslant 10^n x < \mathbf{E}(10^n x) + 1.$$
   En multipliant par $10^{-n}$ il vient :
   $$u_n(x) \leqslant x < u_n(x) + 10^{-n}.$$

   d. Selon la question précédente on a pour tout $n$ entier naturel :
   $$x - 10^{-n} < u_n(x) \leqslant x$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$ on obtient par sandwich :
   $$\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = x}$$

2. • On a $v_n(x) - u_n(x) = 10^{-n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   • On a déjà vu que $u_n(x)$ est une suite croissante. Montrons que $v_n(x)$ est décroissante. On a $\mathbf{E}\left(10^n x\right) + 1 > 10^n x$ donc :

   $$10.\mathbf{E}\left(10^n x\right) + 10 > 10^{n+1} x$$

   Mais, par définition de la partie entière, **le plus petit entier strictement supérieur** à $10^{n+1}x$ est $\mathbf{E}\left(10^{n+1}x\right) + 1$ donc :

   $$10.\mathbf{E}\left(10^n x\right) + 10 \geqslant \mathbf{E}\left(10^{n+1}x\right) + 1$$

   ce qui donne de suite $v_n(x) \geqslant v_{n+1}(x)$ en multipliant chacun des deux membres par $10^{-n}$. □

**Exercice 9**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ et un équivalent simple de $u_n$.
3. On pose $a_n = \dfrac{1}{n} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de $a_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une étude de fonction montre que $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Par continuité de $f_n$ le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution, qui est unique puisque $f_n$ est strictement monotone.

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(1/n) = \dfrac{1}{n^5} > 0$ et $f_n(0) = -1$ donc : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Comme $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, par sandwich on peut conclure que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(u_n) = 0$ donc : $nu_n = 1 - u_n^5 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   Ainsi $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

3. On pose $a_n = \dfrac{1}{n} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de $a_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(u_n) = 0$ donc $na_n = u_n^5$ et ainsi : $a_n = \dfrac{u_n^5}{n} \sim \dfrac{1}{n^6}$.

# 2 Exercices « plus sophistiqués »

**Exercice 10**

1. Le théorème barycentrique de CÉSARO. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite **complexe** telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On pose pour tout $n \geqslant 1$ entier :

   $$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

   a. Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   b. Démontrer alors que si $\ell \neq 0$ on a autant $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $x_{n+1} - x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que : $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ell n$.

3. « D'ALEMBERT implique CAUCHY ». Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $x_n > 0$. On suppose que :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell > 0.$$

   Démontrer que $\sqrt[n]{x_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4. Soit $(x_n)$ la suite définie par $x_0 > 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

   a. Justifier que $(x_n)$ est correctement définie.
   b. Etudier la suite $(x_n)$.
   c. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$ et 3. En déduire un équivalent de $(u_n)$.

5. Soit $p \geqslant 1$ entier. Pour tout $n \geqslant 1$ entier on pose : $s_n = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{(n!)^{\frac{p}{n}}}$.

   a. Soit $a$ un réel. Démontrer que la suite $x_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ converge vers $\mathrm{e}^a$.

   b. Déterminer un équivalent de $s_n$ en $+\infty$. En déduire que $s_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^p$.

1. Le théorème barycentrique de CÉSARO.

   a. • Comme $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ il existe $N$ entier tel que si $n \geqslant N$ on ait : $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

   Il vient alors immédiatement $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} |u_k| \leqslant (N-n)\frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N+1$ puisque cette somme comporte $n-N$ termes.

   • Pour $n \geqslant N+1$ on a :

$$\begin{aligned} |v_n| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1} nu_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1} Nu_k\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N+1} nu_k\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1} Nu_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1} n\,|u_k| \\ &\leqslant \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

   • Comme $K$ est une constante réelle, $\dfrac{K}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi il existe $N_1 \geqslant N+1$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on ait $\dfrac{K}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Il vient alors lorsque $n \geqslant N_1$ : $|v_n| \leqslant \varepsilon$. On est donc assuré que $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   b. Si $\ell \neq 0$ on pose $w_n = u_n - \ell$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors $w_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et selon la question précédente il vient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mais on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell n$ donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = v_n - \ell$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

2. Comme $x_{n+1} - x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ on sait d'après la question précédente que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Mais on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$ et ainsi $\dfrac{x_{n+1} - x_1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc $\dfrac{x_{n+1}}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Comme $\ell \neq 0$ il vient

$$\frac{x_{n+1}}{n} \underset{+\infty}{\sim} \ell$$

Mais les équivalents se comportent urbainement vis à vis des produits $x_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \ell n$. Enfin $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ donc $x_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \ell(n+1)$. Il en résulte que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ell n$.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ell > 0$, on obtient par continuité du logarithme naturel :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln x_{n+1} - \ln x_n = \ln \ell \quad \text{i.e.} \quad \lim_{n\to+\infty} \ln x_n - \ln x_{n-1} = \ln \ell$$

Il vient donc, en vertu de la question précédente $\dfrac{\ln x_n}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$ et en passant à l'exponentielle qui est continue, on obtient : $\sqrt[n]{x_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4. a. **Question importante.** Soit $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, pour $x > 0$. Si $J = ]0,+\infty[$, on a immédiatement $f(J) \subset J$. Comme $x_0 \in J$, cela assure que la suite $(x_n)$ est correctement définie puisqu'une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in N$, $x_n$ *existe et est dans* $J$.

b. Selon la question précédente, on a $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0.$$

On peut donc conclure que $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est strictement croissante}}$.

$\boxed{\text{Si}}$ $(x_n)$ est majorée, elle converge (puisque croissante) vers un réel $\ell > 0$. Comme $x_{n+1} = f(x_n)$ (notation de la question précédente) pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ et comme $f$ est continue, on a $f(\ell) = \ell$ i.e. $\dfrac{1}{\ell} = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(x_n)$ n'est pas majorée : comme elle est croissante, on a $\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.

c. • Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

→ $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$

→ $x_{n+1}^2 - x_n^2 = \left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)^2 - x_n^2 = 2 + \dfrac{1}{x_n^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 2$ $(*)$.

→ $x_{n+1}^3 - x_n^3 = \left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)^3 - x_n^3 = 3x_n + \dfrac{3}{x_n} + \dfrac{1}{x_n^3} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

• Avec $(*)$ et la question 2, on obtient $\dfrac{x_n^2}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 2$ donc $\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}}$.

**Commentaire.** Cette question donne une technique de recherche d'équivalent...

5. a. Si $a = 0$ c'est évident. Sinon, par exemple, on a $\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$ donc $n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} a \neq 0$ ce qui assure que :

$$n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$$

et comme exp est continue on obtient $x_n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$.

b. On a $\underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} \underset{+\infty}{\sim} n^p$. Les quotients et les équivalents s'entendent cordialement :

$$s_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^p}{(n!)^{\frac{p}{n}}} = \left(\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^p$$

Posons alors $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. On a pour $n$ entier : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ldots = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ donc d'après la question 3 on obtient : $\sqrt[n]{x_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ donc $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)^p \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^p$ (par continuité...) ce qui amène bien $s_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^p$.

**Exercice 11**

Soit $(a_n)$ une suite réelle tq $\lim_{n\to+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$. Etudier le comportement de la suite $(a_n)$ à l'infini. Donner un équivalent de cette suite à l'infini.

• Pour $n$ grand on a $a_n > 0$. Puis la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^2$ est croissante donc converge vers $\ell$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\ell \in \mathbb{R}$ on a $\ell > 0$ et $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{\ell}$. Pour $N$ convenable on aura alors $a_n \geqslant \dfrac{1}{2\ell}$ pour tout $n \geqslant N$ et ainsi :

$$S_n \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 + (n - N)\left(\frac{1}{2\ell}\right)^2$$

donc $S_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ ce qui est absurde.

On a donc $\ell = +\infty$ et ainsi $a_n \underset{+\infty}{\to} 0$.

• On regarde alors

$$\begin{aligned} S_{n+1}^3 - S_n^3 &= \underbrace{(S_{n+1} - S_n)}_{=a_{n+1}^2}(S_{n+1}^2 + S_n S_{n+1} + S_n^2) \\ &= a_{n+1}^2 S_{n+1}^2 + a_{n+1} S_n + a_{n+1} S_{n+1} + (a_{n+1} S_n)^2 \end{aligned}$$

Chacun des termes de la somme précédente converge vers 1. En effet on a :

$$a_{n+1} S_n = a_{n+1} S_{n+1} \frac{S_n}{S_{n+1}} = a_{n+1} S_{n+1} \frac{1}{1 + \frac{a_n^2}{S_n}}.$$

On a donc :

$$\exists \lim_{n \to +\infty} (S_{n+1}^3 - S_n^3) = 3 \text{ donc } \exists \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n^3}{n} = 3.$$

Il en résulte que $S_n \sim \sqrt[3]{3n}$ et $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

**Exercice 12**

Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer qu'il existe une extraction $\varphi$ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_p$ on ait :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 2^{-p}.$$

On construit alors une extraction $\varphi$ par récurrence en posant :

$$\begin{cases} \varphi(0) = N_0 \\ \varphi(p+1) = \max\big(\varphi(p) + 1, M_{p+1}\big) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant 2^{-n}$.
Comme la série de terme général $2^{-n}$ converge, par domination, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente.

**Exercice 13**

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente et soit $u_n$ une suite bornée de réels positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} u_k v_k$. Montrer que $u_n$ stationne à 0.

La suite $u_n$ est bornée : on pose à bon droit $\mu_n = \sup_{k \geqslant n} u_k$. On a alors pour tout $n$ entier :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \mu_n \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

Pour $p$ et $n$ entier on a donc :

$$0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \mu_{n+p} \sum_{k=n+p}^{+\infty} v_k.$$

Comme $\mu_{n+p} \leqslant \mu_n$, on a a fortiori :

$$0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \mu_n \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

Il en résulte que :

$$0 \leqslant \sup_{p \in \mathbb{N}} u_{n+p} \leqslant \mu_n \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k}_{=R_n}$$

et ainsi pour tout $n$ entier :

$$\mu_n \leqslant \mu_n R_n.$$

Comme $R_n \to 0$, la suite $\mu_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

**Exercice 14**

Soit $u_n$ une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que :

$$\exists \lim_{n \to +\infty} n u_n = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ entier tel que si $p \geqslant N$ et $q > p$ on ait :

$$0 \leqslant u_p + \ldots + u_q \leqslant \varepsilon.$$

En particulier on a :

$$0 \leqslant u_N + \ldots + u_q \leqslant \varepsilon.$$

Comme la suite $u_n$ est décroissante il vient :

$$0 \leqslant (q - N + 1)u_q \leqslant \varepsilon.$$

On veut $q - N + 1 \geqslant \dfrac{q}{2}$. Il suffit de prendre $q \geqslant 2N - 2$.

# 3 Un petit problème

*On étudie dans ce problème le comportement de suites récurrentes de fonction génératrice $f$ suffisamment régulière avec certaines hypothèses sur la dérivée de $f$. Les trois parties sont* ***indépendantes****.*

## Partie A - Une condition sur la dérivée

Soient $f$ dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a$ dans $\mathbb{R}$. On considère la suite $u$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \neq \ell$ pour tout $n$ entier naturel.

1. Démontrer que $\ell$ est un point fixe de $f$ i.e. que $f(\ell) = \ell$.
2. En utilisant l'identité de la dérivée en $\ell$, montrer que pour tout $n$ entier on dispose d'une suite $(\varepsilon_n)$ telle que $\varepsilon_n \to 0$ et, pour tout $n$ entier naturel :

$$u_{n+1} - \ell = (u_n - \ell)(f'(\ell) + \varepsilon_n)$$

3. Le but de cette question est de démontrer que $|f'(\ell)| \leqslant 1$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $|f'(\ell)| > 1$. On considère un réel $q$ tel que $1 < q < |f'(\ell)|$.
   a. Démontrer l'existence de $N$ entier tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $|f'(\ell) - \varepsilon_n| \geqslant q$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant N$ on a : $|u_n - \ell| \geqslant q^{n-N} |u_N - \ell|$.
   c. Conclure.

## Partie B - Des exemples

Dans cette partie, $f : I \to I$ est de classe $C^1$. On s'intéresse à des exemples où $|f'(\ell)| = 1$.

1. On prend ici $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   a. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\ell$ et que l'on a $f'(\ell) = 1$.
   b. Etudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. On prend ici $f = \sin$.
   a. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\ell$ et que l'on a $f'(\ell) = 1$.
   b. Etudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, \pi[ \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   c. Ecrire le DL-3 en 0 de sin.
   d. Etudier la limite en $+\infty$ de la suite $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.
   e. A l'aide du théorème de *Césaro*, en déduire un équivalent simple de $u_n$.

## Partie C - Points super-attractifs

Ici $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ est de classe $C^2$. On suppose de plus que $f$ admet un point fixe $\ell$ qui est distinct des bornes de $I$ et qui vérifie $f'(\ell) = 0$. Ce point fixe $\ell$ est alors dit *super-attractif.*

1. Soit $k \in ]0, 1[$.
   a. Justifier l'existence de $r > 0$ tel que pour tout $x$ dans $J = [\ell - r, \ell + r]$ on ait : $|f'(x)| \leqslant k$.
   b. Démontrer que $J$ est stable par $f$ i.e. que pour tout $t \in J$ on a $f(t) \in J$.
   c. On considère **pour le reste du problème** la suite $u$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Justifier que $u$ est correctement définie. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} >$ on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n \, |u_0 - \ell|$$

   Qu'en déduire ?
2. Soit $M = \max\limits_{x \in J} |f''(x)|$.
   a. Justifier de l'existence de $M_2$.

b. Démontrer que pour tout $x$ dans $J$ on a : $|f(x) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{M}{2}|x-\ell|^2$

c. Démontrer que pour tout $n$ entier on a :

$$\frac{M}{2}|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{M|u_0-\ell|}{2}\right)^{2^n}$$

3. **Un exemple.** Montrer l'existence de la suite $x_n$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ x_{n+1} = 1 + x_n + \dfrac{1}{x_n} \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

et démontrer que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ on a :

$$|x_n + 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

## Partie A - Une condition sur la dérivée

1. La fonction $f$ est continue donc $\ell = f(\ell)$ (c'est un théorème de leçon).

2. Comme $f$ est dérivable en $\ell$, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle et continue en $\ell$ telle que pour tout $x$ réel on ait :

$$f(x) = \underbrace{f(\ell)}_{=\ell} + f'(\ell)(x-\ell) + (x-\ell)\varepsilon(x)$$

En particulier, lorsque $n$ est un entier on a :

$$f(u_n) - \ell = f'(\ell)(u_n - \ell) + (u_n - \ell)\underbrace{\varepsilon(u_n)}_{=\varepsilon_n}$$

Il vient donc pour tout $n$ entier $u_{n+1} - \ell = (u_n - \ell)(f'(\ell) + \varepsilon_n)$, et, par composition des limites, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

3. a. Selon la question précédente on a pour tout $n$ entier :

$$|u_{n+1} - \ell| = |u_n - \ell|\,|f'(\ell) + \varepsilon_n|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe $N$ entier et $k > 1$ tels que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|f'(\ell) + \varepsilon_n| \geqslant k$.

En effet comme $|f'(\ell)| > 1$ il existe $k > 1$ tel que $|f'(\ell)| > k$. Puis il existe $N$ entier tel que si $n \geqslant N$ on ait $|\varepsilon_n| \leqslant |f(\ell)| - k$ d'où $-|\varepsilon_n| \geqslant k - |f'(\ell)|$. Ainsi pour $n \geqslant N$ on aura par inégalité triangulaire :

$$|f'(\ell) + \varepsilon_n| \geqslant |f'(\ell)| - |\varepsilon_n| \geqslant k$$

Il vient alors pour tout $n \geqslant N$ : $\boxed{|u_{n+1} - \ell| = |u_n - \ell|\,|f'(\ell) + \varepsilon_n| \geqslant k\,|u_n - \ell|}$

b. Une petite récurrence montre que pour tout $n \geqslant N$ on a :

$$|u_n - \ell| \geqslant k^{n-N}\,|u_N - \ell| \qquad (\clubsuit)$$

En effet, c'est évident pour $n = N$ et si $n \geqslant N$ vérifie $|u_n - \ell| \geqslant k^{n-N}\,|u_N - \ell|$ alors on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \geqslant k\,|u_n - \ell| \geqslant k \times k^{n-N}\,|u_N - \ell| = k^{n+1-N}\,|u_N - \ell|$$

c. Comme $k > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^{n-N} = +\infty$. Mais $u_N \neq \ell$ (puisque la suite n'est pas stationnaire) : d'après ($\clubsuit$) on obtient $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est absurde.

## Partie B - Des exemples

1. a. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $R$ et on a pour tout $x$ réel :

$$\varphi'(x) = \operatorname{ch} x - 1 \geqslant 0$$

Puis $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc au plus une solution. Comme $\varphi(0) = 0$, on peut donc dire que sh admet un unique point fixe qui est $\ell = 0$. On a alors $\operatorname{sh}'(\ell) = \operatorname{ch} 0 = 1$.

b. • Comme $\text{sh}(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $u_0 \in \mathbb{R}^+$, la suite $(u_n)$ est correctement définie et $u_n \geqslant 0$ pour tout $n$ entier. Puis, avec les notations de la question précédente, pour $x > 0$ on a $\varphi(x) > 0$ i.e. $\text{sh}\, x > x$. Ainsi on a

$$u_{n+1} > u_n$$

pour tout $n$ entier naturel : la suite $(u_n)$ est **strictement croissante**.

• Supposons que $(u_n)$ soit majorée : selon le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers un réel $\lambda$ qui doit être un point fixe de $f = \text{sh}$ puisque $f$ est continue. Mais $f$ admet un unique point fixe qui est 0 et $\lambda \geqslant u_0 = 1$ puisque $(u_n)$ est croissante : la suite $(u_n)$ n'est pas majorée. Il en résulte que :

$$\exists \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

2. a. On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \sin x - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $R$ et on a pour tout $x$ réel :

$$\varphi'(x) = \cos x - 1$$

Ainsi $\varphi' \leqslant 0$ et les zéros de $\varphi'$ sont isolés : la fonction $\varphi$ décroît strictement sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(0) = 0$, l'équation $\sin x = x$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est $\ell = 0$. On a clairement $f'(\ell) = 1$.

b. • Comme $f(]0,\pi[) = ]0,1] \subset ]0,\pi[$, la suite $(u_n)$ est correctement définie et on a $u_n \in ]0,\pi[$ pour tout $n$ entier naturel.

• Avec les notations de la question précédente on a $\varphi(x) < 0$ pour tout $x > 0$ donc pour tout $n$ entier on a : $u_{n+1} < u_n$. La suite $(u_n)$ est donc **strictement décroissante**.

• La suite $(u_n)$ est donc **décroissante** et **minorée** par 0 : elle converge vers un réel $\lambda \geqslant 0$. Mais comme $f = \sin$ est continue, ce réel $\lambda$ est un point fixe de $f$ i.e. $\lambda = 0$ selon la question 2a.

c. Pour $x$ réel on a : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

d. Pour $n$ entier, étudier la limite en $+\infty$ de la suite $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. Pour $n$ entier naturel on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_{n+1}^2 u_n^2} = \frac{u_n^2 - (\sin u_n)^2}{(\sin u_n)^2 u_n^2} \\ &= \frac{u_n^2 - \left(u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + u_n^3\varepsilon(u_n)\right)^2}{\left(u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + u_n^3\varepsilon(u_n)\right)^2 u_n^2} = \frac{u_n^2 - \left(u_n^2 - \dfrac{u_n^4}{3} + u_n^4\eta_n\right)}{\left(u_n^2 - \dfrac{u_n^4}{3} + u_n^4\eta_n\right) u_n^2} \quad \text{où } \lim_{n\to+\infty} \end{aligned}$$

Il vient donc : $v_n = \dfrac{\dfrac{1}{3} + \eta_n}{1 - \dfrac{u_n^2}{3} + u_n^2\eta_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.

e. Un corollaire du théorème de Césaro affirme que l'on a alors : $\dfrac{1}{nu_n^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ et ainsi $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}}$.

## Partie C - Points super-attractifs

1. a. La fonction $f$ est de classe $C^2$ sur $I$ donc $f'$ est continue. En particulier elle est continue en $\ell$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x$ réel tel que $|x - \ell| \leqslant \alpha$ on ait :

$$|f'(x) - f'(\ell)| \leqslant \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = k$ on dispose donc de $r = \alpha_k$ tel que pour tout $x$ dans $[\ell - r; \ell + r]$ on a :

$$|f'(x)| \leqslant k$$

b. Soit $x$ dans $J$. Si $x = \ell$ on a alors $f(\ell) = \ell \in J$. Sinon $x \neq \ell$ et alors, selon les **accroissements finis ponctués** appliqués à bon droit ($f$ est $C^2$ sur $J$), il existe $c_x$ entre $x$ et $\ell$ tel que :

$$f(x) - f(\ell) = (x - \ell)f'(c_x)$$

Il vient alors :

$$|f(x) - \ell| = |x - \ell|\,|f'(c)| \leqslant kr \leqslant r$$

donc $f(x) \in [\ell - r, \ell + r] = J$ : $\boxed{J \text{ est stable par } f}$.

c. • Comme $f(J) \subset J$ et $u_0 \in J$ la suite $u$ est correctement définie et on a $u_n \in J$ pour tout $n$ entier naturel.

• Comme $f'$ est bornée par $k$ sur $J$, la fonction $f$ est $k$-lipschitzienne sur $J$ : pour tout $x$ et $y$ dans $J$ on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|y - x|$$

En particulier pour tout $n$ entier on a donc :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_n - \ell| \quad \text{i.e.} \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$$

• Puis si $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$ pour un certain $n$ entier alors on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leqslant k\,|u_n - \ell| \\ &\leqslant k \times k^n\,|u_0 - \ell| = k^{n+1}\,|u_0 - \ell| \end{aligned}$$

Comme on a bien $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$ pour $n = 0$, on peut conclure, par récurrence, que :

$$\boxed{|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell| \quad \text{pour tout } n \text{ entier naturel}}$$

• Comme $k \in ]0, 1[$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ et ainsi $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$ : $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } \ell}$.

2. a. La fonction $f$ est de classe $C^2$ sur $I$ donc $f''$ est continue sur $J$ qui est un segement : $f''$ est donc bornée sur $J$ et atteint ses bornes d'où l'existence de $M_2 = \max\limits_{x \in J} |f''(x)|$.

b. Sur $J$, la fonction $f$ est de classe $C^2$ : on peut donc utiliser Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : pour tout $x$ dans $J$ il existe $c_x$ entre $x$ et $\ell$ tel que :

$$f(x) = f(\ell) + (x - \ell)\underbrace{f'(\ell)}_{=0} + \frac{(x-\ell)^2}{2} f''(c_x)$$

Ainsi on a pour tout $x$ dans $J$ :

$$|f(x) - f(\ell)| = \frac{(x-\ell)^2}{2}\,|f''(c_x)| \leqslant \frac{(x-\ell)^2}{2} M$$

donc pour tout $x$ dans $J$ on a : $\boxed{|f(x) - \ell| \leqslant \dfrac{(x-\ell)^2}{2} M}$ $(\heartsuit)$

c. • Comme $u_n$ appartient à $J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, d'après $(\heartsuit)$ :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{M(u_n - \ell)^2}{2}$$

• Supposons maintenant que $\dfrac{M}{2}\,|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{M\,|u_0 - \ell|}{2}\right)^{2^n}$ pour un certain $n$ entier naturel. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{M}{2}\,|u_{n+1} - \ell| &\leqslant \frac{M}{2} \times \frac{M(u_n - \ell)^2}{2} = \left(\frac{M(u_n - \ell)}{2}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\left(\frac{M\,|u_0 - \ell|}{2}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{M\,|u_0 - \ell|}{2}\right)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{M}{2}\,|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{M\,|u_0 - \ell|}{2}\right)^{2^n}$ est clairement vrai pour $n = 0$, on peut conclure par récurrence que pour tout $n$ entier on a :

$$\boxed{\frac{M}{2}\,|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{M\,|u_0 - \ell|}{2}\right)^{2^n}}$$

3. • Soit $f : ]-\infty, 0[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{x}$. Cette fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $I = ]-\infty, 0[$.

• Cherchons les points fixes éventuels de $f$. Pour $x < 0$ on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

La fonction $f$ admet donc un unique point fixe $\ell = 1$.

• Cette fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ de sorte que $f'(\ell) = 0$ (le point fixe est super-attractif). Puis si $x \in [-\dfrac{3}{2}, -1]$ on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$. L'intervalle

$[-\frac{3}{2}, -1]$ est donc stable par $f$ et la suite $(x_n)$ est correctement définie avec $x_n \in [-\frac{3}{2}, -1]$ pour tout $n$ entier.

• Puis la dérivée seconde de $f$ est $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Elle est bornée par $M = 2$ sur $[-\frac{3}{2}, -1]$ et cela suffit : on peut refaire ce qui a été fait à la question 2c et 2d mais en se restreignant aux $x \in [-\frac{3}{2}, -1]$. On obtient alors pour tout $n$ entier :

$$|u_n + 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$