Exercices sur les suites

Table des matières

1 Exercices « de base » 1

2 Exercices « plus sophistiqués » 2

3 Un petit problème 3

1 Exercices « de base »

Exercice 1
On s'embrouille dans la définition de la convergence ? Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Traduire sur (u_n) chacun des énoncés qui suivent, tous obtenus par « mélanges » à partir de la définition de $u_n \to \ell$:

1. $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
2. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
4. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \leq n, |u_N - \ell| \leq \varepsilon$.
5. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \leq n, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exercice 2
Pour tout entier $n > 0$ on note u_n le chiffre des unités de 7^{n^2}. Trouver :

$$a = 0, u_1 u_2 u_3 \dots$$

Exercice 3
Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1 - \sin \dfrac{x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et que cette solution est dans $[0;1]$; on note x_n cette solution.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que (x_n) est monotone.

Exercice 5
On considère les suites u, v et w définies pour $n \geqslant 1$ entier par :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{nn!} \\ w_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

1. Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. On appellera ℓ leur limite commune.
2. A l'aide de la formule de Taylor-intégrale appliquée à l'exponentielle, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\frac{1}{n!(n+1)} \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!(n+1)}.$$
3. Démontrer que la suite (w_n) croît strictement vers e.

Exercice 6
Soit $a > 0$.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que l'on définit correctement une suite (u_n) en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.
2. Etudier la suite (u_n).

Exercice 7 (Moyenne arithmético-géométrique)
Soient a et b des réels tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a,\ v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array}\right\} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1. Montrer que ces relations définissent bien les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et qu'elles ont même limite.
3. Que se passe-t-il lorsque $b = 0$? lorsque $a = b$?

Exercice 8 (Approximation décimale d'un réel)
On rappelle qu'un nombre décimal est un réel de la forme $\alpha 10^{-n}$ où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre décimal $u_n(x) = \mathbf{E}(10^n x).10^{-n}$* ***est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.*** *La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est appelée* ***la suite des approximations décimales par défaut de x.***
   a. Donner les 5 premiers termes de l'approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$, de $\frac{2}{3}$,de $-\frac{2}{3}$. Que dire de la suite des approximations décimales par défaut d'un nombre entier relatif ? D'un nombre décimal ?
   b. Montrer que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leqslant x < u_n(x) + 10^{-n}$.
   d. En déduire que $u_n(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$.

2. On définit, de même : *pour tout $n \in \mathbb{N}$,* ***l'approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près*** *: c'est le nombre décimal $v_n(x) = u_n(x)+10^{-n}$;* ***la suite des approximations décimales par excès de x*** *: c'est la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.*
   Montrer que les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 9
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) et un équivalent simple de u_n.
3. On pose $a_n = \frac{1}{n} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de a_n.

2 Exercices « plus sophistiqués »

Exercice 10

1. Le théorème barycentrique de César. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite **complexe** telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On pose pour tout $n \geqslant 1$ entier :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

   a. Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   b. Démontrer alors que si $\ell \neq 0$ on a autant $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $x_{n+1} - x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que : $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ell n$.

3. « d'Alembert implique Cauchy ». Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $x_n > 0$. On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell > 0.$$

   Démontrer que $\sqrt[n]{x_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

   a. Justifier que (x_n) est correctement définie.
   b. Etudier la suite (x_n).
   c. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x_{n+1}^{\alpha} - x_n^{\alpha}$ pour $\alpha = 1, 2$ et 3.
   En déduire un équivalent de (u_n).

5. Soit $p \geqslant 1$ entier. Pour tout $n \geqslant 1$ entier on pose : $s_n = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{(n!)^{\frac{p}{n}}}$.

   a. Soit a un réel. Démontrer que la suite $x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ converge vers e^a.

b. Déterminer un équivalent de s_n en $+\infty$. En déduire que $s_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^p$.

Exercice 11
Soit (a_n) une suite réelle tq $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$. Etudier le comportement de la suite (a_n) à l'infini. Donner un équivalent de cette suite à l'infini.

Exercice 12
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Démontrer qu'il existe une extraction φ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge.

Exercice 13
Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente et soit u_n une suite bornée de réels positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k v_k$. Montrer que u_n stationne à 0.

Exercice 14
Soit u_n une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que :

$$\exists \lim_{n\to+\infty} nu_n = 0.$$

3 Un petit problème

On étudie dans ce problème le comportement de suites récurrentes de fonction génératrice f suffisamment régulière avec certaines hypothèses sur la dérivée de f. Les trois parties sont ***indépendantes****.*

Partie A - Une condition sur la dérivée

Soient f dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et a dans $\mathbb{R}$. On considère la suite u définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \neq \ell$ pour tout n entier naturel.

1. Démontrer que ℓ est un point fixe de f i.e. que $f(\ell) = \ell$.
2. En utilisant l'identité de la dérivée en ℓ, montrer que pour tout n entier on dispose d'une suite (ε_n) telle que $\varepsilon_n \to 0$ et, pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} - \ell = (u_n - \ell)(f'(\ell) + \varepsilon_n)$$

3. Le but de cette question est de démontrer que $|f'(\ell)| \leqslant 1$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $|f'(\ell)| > 1$. On considère un réel q tel que $1 < q < |f'(\ell)|$.

   a. Démontrer l'existence de N entier tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $|f'(\ell) - \varepsilon_n| \geqslant q$.

   b. En déduire que pour tout $n \geqslant N$ on a : $|u_n - \ell| \geqslant q^{n-N} |u_N - \ell|$.

   c. Conclure.

Partie B - Des exemples

Dans cette partie, $f : I \to I$ est de classe C^1. On s'intéresse à des exemples où $|f'(\ell)| = 1$.

1. On prend ici $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

   a. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ et que l'on a $f'(\ell) = 1$.

   b. Etudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. On prend ici $f = \sin$.

   a. Montrer que f admet un unique point fixe ℓ et que l'on a $f'(\ell) = 1$.

   b. Etudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \pi[\\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   c. Ecrire le DL-3 en 0 de sin.

   d. Etudier la limite en $+\infty$ de la suite $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.

   e. A l'aide du théorème de *Césaro*, en déduire un équivalent simple de u_n.

Partie C - Points super-attractifs

Ici I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ est de classe C^2. On suppose de plus que f admet un point fixe ℓ qui est distinct des bornes de I et qui vérifie $f'(\ell) = 0$. Ce point fixe ℓ est alors dit *super-attractif*.

1. Soit $k \in]0, 1[$.

   a. Justifier l'existence de $r > 0$ tel que pour tout x dans $J = [\ell - r, \ell + r]$ on ait : $|f'(x)| \leqslant k$.

   b. Démontrer que J est stable par f i.e. que pour tout $t \in J$ on a $f(t) \in J$.

   c. On considère **pour le reste du problème** la suite u donnée par :

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Justifier que u est correctement définie. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} >$ on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n \, |u_0 - \ell|$$

   Qu'en déduire ?

2. Soit $M = \max_{x \in J} |f''(x)|$.

   a. Justifier de l'existence de M_2.

   b. Démontrer que pour tout x dans J on a : $|f(x) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{M}{2} \, |x - \ell|^2$

   c. Démontrer que pour tout n entier on a :

$$\frac{M}{2} \, |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{M \, |u_0 - \ell|}{2} \right)^{2^n}$$

3. **Un exemple.** Montrer l'existence de la suite x_n définie par

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ x_{n+1} = 1 + x_n + \dfrac{1}{x_n} \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   et démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

$$|x_n + 1| \leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}$$