Feuille d'exercices n° 3. Espaces vectoriels normés I.
Quelques corrections

Exercice 1
Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe un isomorphisme linéaire $\varphi : E \to F$ et que $\|\ \|$ est une norme sur E.
Pour $x \in F$ on pose $N(x) = \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|$. Démontrer que N est une norme sur F.

Exercice 2
1. Déterminer une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}[X]$ tel $\|X^n\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Déterminez une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $N(P_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3
Existe-t-il une norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ on ait : $\|AB\| = \|A\|\,\|B\|$?

Exercice 4
Soient $E = \mathbb{R}[X]$, A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $P \in E$ on pose : $\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\ \|_A$ soit une norme sur E.

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P dans E on pose $H(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(n)\right|$. Montrer que H est une norme sur E.

Notons que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P^{(\deg P+1)} = 0$ et ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(n)\right|$ est une somme finie donc $H(P)$ est bien un réel (positif).

L'inégalité triangulaire et l'homogénéité ne posent pas de problèmes. Pour la séparation, on suppose qu'il existe prenons P non nul dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $H(P) = 0$. Notons $m = \deg P$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{m} \left|P^{(n)}(n)\right| = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \{0, \dots, m\}$ on a $P^{(n)}(n) = 0$. En particulier $P^{(m)}(m) = 0$. Mais on a $P^{(m)} = m!a_m$ (polynôme constant) où a_m est le coefficient dominant de P (donc non nul puisque P non nul), donc $m! = 0$: c'est absurde.

Exercice 6
On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt.$$

1. Démontrer que $\|\ \|$ définit une norme sur E.
   De même, $\|\ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b) Démontrer que les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont équivalentes sur E.

3. Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$ et on rappelle qu'il s'agit d'une norme sur E.

   a) Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$. Démontrer que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t$.

   b) En déduire que pour tout $f \in E$ on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|$.

   c) Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_1$ sont-elle équivalentes ?

1. Soit f dans E. La fonction f est de classe C^1 sur $I = [0,1]$, donc la fonction $|f'|$ est continue sur $I = [0,1]$. Ainsi $\|f\|$ a bien un sens et est un réel positif.
   Puis soient f et g dans E ainsi que λ réel. On a :

   — $\|f\| \geqslant 0$.

   — $\|f+g\| = |(f+g)(0)| + \displaystyle\int_0^1 |(f+g)'(t)|\,dt \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| + |g'(t)|\ dt = \|f\| + \|g\|$.

   — $\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |(\lambda f)'(t)|\,dt = |\lambda|\,|f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|$

   Supposons enfin que $\|f\| = 0$. Alors $|f(0)| = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$ car ces 2 nombres sont positifs et de somme nulle. Or $|f'|$ est une fonction **continue** et **positive**, donc $f' = 0$, et ainsi f est constante sur l'intervalle $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle.

   Conclusion. $\|\ \|$ est bien une norme sur E.

2. a) Par définition, deux normes N_1 et N_2 sur E sont des normes équivalentes sur E lorsqu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant :

   $$\forall u \in E,\ \alpha N_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant \beta N_1(u)$$

   b) Soit $f \in E$. On a : $\|f\| = |f(0)| + 2\displaystyle\int |f'| \leqslant 4\,|f(0)| + 2\int |f'| = 2\,\|f\|'$
   De plus $\|f\|' = 2\,|f(0)| + \displaystyle\int |f'| \leqslant 2\,|f(0)| + 4\int |f'| = 2\,\|f\|$. Ainsi pn a : $\dfrac{1}{2}\,\|f\| \leqslant \|f\|' \leqslant 2\,\|f\|$.
   Ceci étant valable quelque soit le choix de f dans E, les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont équivalentes.

3. a) On a $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et avec l'inégalité triangulaire, on obtient :

   $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \underbrace{\left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|}_{\leqslant \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t}$$

   Conclusion. $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t$.

   b) Soit $f \in E$. Comme la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est croissante sur $[0,1]$, il vient pour tout $x \in [0,1]$:

   $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = \|f\|$$

   Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \|f\|\ \mathrm{d}x = \|f\|$

c) On considère pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ qui est un élément de E. On a :

$$\|f_n\| = \int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

S'il existe $\beta > 0$ tel que $\| \ \| \leqslant \beta \| \ \|_1$ alors on aurait $\beta \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde puisque $\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclusion. Les normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans E, on pose : $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.

1. Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.
2. Démontrer que $N_\infty \leqslant N_1$.
3. Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 8

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant k N_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

1. a) • Montrons que N_∞ est une norme sur E.
Pour tout f dans E, la fonction $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.
— Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.
Alors, $\forall\, t \in [0,1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$. Comme $|\lambda| \geq 0$, on a par positive homogénéité de la borne supérieure
$N_\infty(\lambda f) = \sup_{x \in [0;1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in [0;1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| = |\lambda| N_\infty(f)$.

— Soit $(f,g) \in E^2$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g).$$

Ainsi $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

• Montrons Prouvons que N_1 est une norme sur E.
Pour tout f dans E, $|f|$ la fonction est continue et positive sur $[0,1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.
— Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$. Or $|f|$ est **continue et positive** sur $[0,1]$, donc $|f|$ est nulle c'est-à-dire $f = 0$.
— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$. On a :

$$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| N_1(f).$$

— Soit $(f,g) \in E^2$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a $|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. Ainsi, par croissance et linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$.

b) Pour tout $f \in E$ on a :

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)\mathrm{d}t = N_\infty(f).$$

2. Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$: $f_n(t) = t^n$. On a alors $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.
Ainsi ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 9
Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{|f(x)|}{1+|x|}$. Démontrer que N est une norme sur E.

Exercice 10
Soit $E = \left\{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$. Pour f dans E on pose :

$$\begin{cases} \|f\|_1 &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_2 &= \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

1. Démontrer E est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce sont des normes sur E.
2. On note $F = C^0([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\| \ \|_\infty$. On considère :

$$\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f + f' \end{pmatrix}.$$

Démontrer que φ est une application linéaire bijective et isométrique de $(E, \| \ \|_2)$ sur $(F, \| \ \|_\infty)$.

3. Démontrer que les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont équivalentes.

1. Il y a une petite difficulté pour la seconde norme. Pour la séparation : si f dans E vérifie $\|f\|_2 = 0$ alors $f + f' = 0$ donc il existe une constante C telle que $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, et on a $C = 0$ puisque $f(0) = 0$.

2. • La linéarité est évidente. L'injectivité provient de ce qui est écrit ci-dessus. Le caractère isométrique signifie que :

$$\|\varphi(f)\|_\infty = \|f\|_2 \,,$$

ce qui est immédiat.

• La seule difficulté est la surjectivité. On prend h dans F et on cherche f dans E telle que $f + f' = h$.
La solution générale sur $[0,1]$ de l'équation différentielle homogène $y + y' = 0$ est $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où C est une constante.
On cherche alors une solution particulière de $y + y' = h$ sous la forme $y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-x}$ où C est cette fois une fonction (variation de la constante...).
On a, pour x dans $[0,1]$, $y'(x) = (C'(x) - C(x))\mathrm{e}^{-x}$ donc :

$$h(x) \quad = \quad y(x) + y'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-x}$$

ce qui donne $C'(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}$ et on prend $C(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t h(t) \, \mathrm{d}t$. La solution générale de $y + y' = h$ est alors :

$$x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t h(t) \, \mathrm{d}t,$$

où C est une constante. La contrainte $f(0) = 0$ amène $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t h(t) \, \mathrm{d}t$.

3. • On a de suite, par inégalité triangulaire pour la norme $\|\ \|_\infty$:

$$\|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_1 .$$

• Prenons f dans E. Posons $h = \varphi(f)$. On a vu que f vérifie pour tout x dans $[0,1]$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t h(t)\, \mathrm{d}t.$$

On a alors pour tout x dans $[0,1]$:

$$|f(x)| \leqslant \int_0^x \left|\mathrm{e}^t h(t)\right|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\, \|h\|_\infty\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}\, \|h\|_\infty = \mathrm{e}\, \|f\|_2 .$$

donc $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{e}\, \|f\|_2$.
Enfin pour tout x dans $[0,1]$ on a :

$$|f'(x)| = |h(x) - f(x)| \leqslant |h(x)| + |f(x)| \leqslant \|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_2 + \mathrm{e}\, \|f\|_2$$

donc $\|f'\|_\infty \leqslant (1+\mathrm{e})\, \|f\|_2$.
Il vient alors $\|f\|_1 \leqslant (1+2\mathrm{e})\, \|f\|_2$

Exercice 11
On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\, \mathrm{d}t}$.

1. Justifier que E est de dimension infinie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^{i2n\pi x}$.
   a) Montrer que (φ_n) est une suite dans E.
   b) Démontrer que pour tout $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$ on a : $\|\varphi_p - \varphi_q\|_2 = \sqrt{2}$.
   c) Démontrer que (φ_n) n'admet pas de sous-suite convergente.

Exercice 12
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
   P1. f est continue sur E.
   P2. f est continue en 0_E.
   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\, \|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)| .$$

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$. Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 13
Soient $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in E$ on pose $\|P\| = \int_0^1 |P|$.

1. Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $P_n = \left(1 - X^2\right)^n$. Montrer que (P_n) converge vers 0 dans $(E, \|\ \|)$.
3. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est-elle continue de $(E, \|\ \|) \to \mathbb{R}$?

1. Pour le lecteur.

2. Utiliser par exemple le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

3. Supposons que φ soit continue. Comme elle est linéaire, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $p \in \mathbb{R}[X]$ on ait :
$$|\varphi(P)| \leqslant M \|P\|.$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 = |P_n(0)| \leqslant M \|P_n\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est profondément stupide.

Exercice 14
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{P}_n$ n'est pas borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15
Soit $n \geqslant 2$ entier. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Une définition. Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :
$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 & (1) \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. & (2) \end{cases}$$

1. Vérifier que la condition (2) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
3. Démontrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 17
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que son graphe $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est un fermé de $E \times F$.

L'espace vectoriel produit $E \times F$ est muni de la norme produit :
$$N_\infty((x,y)) = \max(\|x\|_E, \|x\|_F).$$
Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite dans G_f telle que $(x_n, f(x_n)) \underset{+\infty}{\longrightarrow} (x,y) \in E \times F$.
On a ainsi $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x$ et $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} y$ puisque :
$$\begin{cases} \|x_n - x\|_E \leqslant N_\infty((x_n, f(x_n)) - (x,y)) \\ \|f(x_n) - y\|_E \leqslant N_\infty((x_n, f(x_n)) - (x,y)) \end{cases}$$
Par continuité de f, $f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et par unicité de la limite $y = f(x)$ de sorte que $(x,y) \in G_f$.

Exercice 18
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\ \|_\infty$. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E.

1. Montrer que $|||\ ||| : \varphi \mapsto \sup\limits_{f \in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.

2. On considère l'application $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}$. Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|||\varphi|||$.

1. • Soit $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$. D'après le cours il existe une constante k telle que pour tout $f \in E$ on ait : $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k \|f\|_\infty$.
   Ainsi, dès que $f \neq 0$, il vient : $\dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant k$. Il en résulte que $|||\varphi|||$ est correctement définie dans $\mathbb{R}$ et est un réel positif.
   • Le reste pour le lecteur.
2. • φ est bien linéaire et on a pour tout $f \in E$ et $x \in [0,1]$:
$$|\varphi(f)(x)| \leqslant \int_0^x |f(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant x \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty .$$
   Ainsi $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ ce qui assure que φ est continue avec : $|||\varphi||| \leqslant 1$.
   • Si $\tilde{1}$ désigne la fonction constante de valeur 1, on a $\varphi(\tilde{1}) = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ donc $\|\varphi(\tilde{1})\|_\infty = \|\tilde{1}\|_\infty$ donc $|||\varphi||| = 1$.

Exercice 19
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et E_+ l'ensemble des f de E positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \displaystyle\int_0^1 |f|\varphi$.

1. Soit $\varphi \in E_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur E.
2. Soient φ_1 et φ_2 dans E_+. On suppose $\varphi_1 > 0$ et $\varphi_2 > 0$. Montrer que $\| \ \|_{\varphi_1}$ et $\| \ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\| \ \|_{x \mapsto x}$ et $\| \ \|_{x \mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient immédiatement. Quant à l'axiome de séparation, si on suppose que $|f|_\varphi = 0$ alors $\int_0^1 |f|\varphi = 0$ et $|f|\varphi = 0$, puisque la fonction intégrée est positive et continue. Si φ ne s'annule pas on obtient directement $f = 0$ et sinon en notant $a_1, \ldots, a_p$ les points (en nombre fini par hypothèse) où φ s'annule on a $\forall x \in]0,1] \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$, $f(x) = 0$ et par continuité aux points $a_1, \ldots, a_p$ on a aussi $f(a_1) = \cdots = f(a_p) = 0$, donc $f = 0$.
2. Sur le fermé borné $[0,1]$ les fonctions continues φ_1 et φ_2 sont bornées et atteignent leurs bornes. Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2, ici strictement positifs, tels que
$$\forall x \in]0,1], \quad 0 < \alpha_1 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \beta_1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1], \quad 0 < \alpha_2 \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \beta_2.$$
   Il s'ensuit que $\forall x \in]0,1]$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1}\varphi_1(x)$ et en multipliant par $|f(x)| \geqslant 0$ et en intégrant on obtient :
$$\forall f \in E, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}\|f\|_{\varphi_1} \leqslant \|f\|_{\varphi_2} \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1}\|f\|_{\varphi_1}.$$
3. La réponse est **NON.** Notons $\|\cdot\|_1$ la première norme et $\|\cdot\|_2$ la seconde. On a évidemment $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$ mais, pour la fonction continue f_n définie par $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in]0, \frac{1}{n}]$ et 0 si $x \in]\frac{1}{n}, 1]$, on a
$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} x(1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6n^2} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \int_0^{1/n} x^2(1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12n^3},$$
   ce qui prouve qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E$, $\alpha\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2$ ($\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = 2n \to +\infty$).

Exercice 20
Soit E l'ensemble des $(x_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général x_n^2 converge.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'application qui à $(x_n) \in E$ associe $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2}$ définit une norme.
3. Soit $F\colon (x_n) \in E \mapsto x_0 \in \mathbb{R}$. L'application F est-elle continue ?
4. Si $(x_n) \in E$, montrer que la suite de terme général $x_n + x_{n+1}$ est dans E. L'application $G\colon (x_n)_{n\geqslant 0} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\geqslant 0} \in E$ est-elle continue ?

1. L'inégalité $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, montre que, si (x_n) et (y_n) appartiennent à E, alors la série de terme général $x_n y_n$ est absolument convergente, donc convergente.

   Puis
   - L'ensemble E est non vide car il contient la suite nulle.
   - Il est stable par le produit par un scalaire (évident).
   - Il est stable par la somme, car si (x_n) et (y_n) appartiennent à E, alors $0 \leqslant (x_n + y_n)^2 = x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n$, qui est une somme de trois termes de séries convergentes, donc $\sum (x_n + y_n)^2$ converge.

   Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. On va plutôt montrer que $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur E, et la proposition demandée en résulte ($x \mapsto \|x\|$ sera la norme euclidienne associée à ce produit scalaire).

   Tout d'abord, pour tout $(x, y) \in E^2$, la série de terme général $x_n y_n$ converge (vu plus haut). Ensuite, la bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Enfin, $\langle x, x\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = 0$ si et seulement si x est la suite nulle.

3. L'application F est clairement linéaire, et lipschitzienne de rapport 1 car

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad |F(x)| = |x_0| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2} = \|x\|.$$

   Il en résulte que F est continue.

4. De l'inégalité $(x_n + x_{n+1})^2 \leqslant 2(x_n^2 + x_{n+1}^2)$, on déduit d'une part que $(x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, et d'autre part que

$$\|G(x)\|^2 \leqslant 2\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n^2 + x_{n+1}^2) = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2 - x_0^2) \leqslant 4\|x\|^2.$$

   Comme G est manifestement linéaire, il résulte de cette inégalité de qu'elle est 2-lipschitzienne, donc continue.

Exercice 21

Soit ℓ^∞ le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites bornées. On munit ℓ^∞ de la norme infinie $\|\ \|_\infty$. Si $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on note $\Delta(u)$ la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme continu de ℓ^∞.
2. Calculer $|||\Delta|||$ (voir exercice 18).

Pour tout $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on a $|\Delta(u)| \leqslant 2\|u\|$ donc $\Delta(u) \in \ell^\infty$. De plus, Δ est linéaire et

$$\|\Delta(u)\| \leqslant 2\|u\|$$

donc elle est aussi continue et $|||\Delta||| \leqslant 2$.

Pour $u = ((-1)^n)$, on a $\|\Delta(u)\| = 2$, et donc $|||\Delta||| = 2$