Feuille d'exercices n° 3. Espaces vectoriels normés I.

Exercice 1
Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe un isomorphisme linéaire $\varphi : E \to F$ et que $\| \ \|$ est une norme sur E.
Pour $x \in F$ on pose $N(x) = \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|$. Démontrer que N est une norme sur F.

Exercice 2
1. Déterminer une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}[X]$ tel $\|X^n\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Déterminez une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $N(P_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3
Existe-t-il une norme $\| \ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ on ait : $\|AB\| = \|A\| \, \|B\|$?

Exercice 4
Soient $E = \mathbb{R}[X]$, A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $P \in E$ on pose : $\|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(x)|$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\| \ \|_A$ soit une norme sur E.

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P dans E on pose $H(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(n)\right|$. Montrer que H est une norme sur E.

Exercice 6
On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)| \, dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt.$$

1. Démontrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.
   De même, $\| \ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b) Démontrer que les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes sur E.
3. Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$ et on rappelle qu'il s'agit d'une norme sur E.
   a) Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. Démontrer que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t$.
   b) En déduire que pour tout $f \in E$ on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|$.
   c) Les normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ sont-elle équivalentes ?

Exercice 7
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans E, on pose : $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.
1. Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur E.
2. Démontrer que $N_\infty \leqslant N_1$.
3. Démontrer que les normes N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 8
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

1. a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 9
Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{|f(x)|}{1+|x|}$. Démontrer que N est une norme sur E.

Exercice 10
Soit $E = \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$. Pour f dans E on pose :

$$\begin{cases} \|f\|_1 &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_2 &= \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

1. Démontrer E est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce sont des normes sur E.
2. On note $F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\ \|_\infty$. On considère :

$$\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f + f' \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que φ est une application linéaire bijective et isométrique de $(E, \|\ \|_2)$ sur $(F, \|\ \|_\infty)$.
3. Démontrer que les normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont équivalentes.

Exercice 11
On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1],\mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\ \mathrm{d}t}$.

1. Justifier que E est de dimension infinie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^{i2n\pi x}$.
   a) Montrer que (φ_n) est une suite dans E.
   b) Démontrer que pour tout $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$ on a : $\|\varphi_p - \varphi_q\|_2 = \sqrt{2}$.
   c) Démontrer que (φ_n) n'admet pas de sous-suite convergente.

Exercice 12
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
   P1. f est continue sur E.
   P2. f est continue en 0_E.
   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

   On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 13
Soient $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in E$ on pose $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P|$.

1. Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $P_n = \left(1 - X^2\right)^n$. Montrer que (P_n) converge vers 0 dans $(E, \| \ \|)$.
3. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est-elle continue de $(E, \| \ \|) \to \mathbb{R}$?

Exercice 14
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{P}_n$ n'est pas borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15
Soit $n \geqslant 2$ entier. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ si $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Une définition. Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ a_{i,j} \geqslant 0 & (1) \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. & (2) \end{cases}$$

1. Vérifier que la condition (2) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
3. Démontrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 17
Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que son graphe $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est un fermé de $E \times F$.

Exercice 18
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\| \ \|_\infty$. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E.

1. Montrer que $|\!|\!| \ |\!|\!| : \varphi \mapsto \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. On considère l'application $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}$. Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|\!|\!|\varphi|\!|\!|$.

Exercice 19
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et E_+ l'ensemble des f de E positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \displaystyle\int_0^1 |f|\varphi$.

1. Soit $\varphi \in E_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur E.
2. Soient φ_1 et φ_2 dans E_+. On suppose $\varphi_1 > 0$ et $\varphi_2 > 0$. Montrer que $\| \ \|_{\varphi_1}$ et $\| \ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\| \ \|_{x \mapsto x}$ et $\| \ \|_{x \mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 20
Soit E l'ensemble des $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général x_n^2 converge.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'application qui à $(x_n) \in E$ associe $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2}$ définit une norme.
3. Soit $F\colon (x_n) \in E \mapsto x_0 \in \mathbb{R}$. L'application F est-elle continue ?
4. Si $(x_n) \in E$, montrer que la suite de terme général $x_n + x_{n+1}$ est dans E. L'application $G\colon (x_n)_{n\geqslant 0} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\geqslant 0} \in E$ est-elle continue ?

Exercice 21
Soit ℓ^∞ le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites bornées. On munit ℓ^∞ de la norme infinie $\| \ \|_\infty$. Si $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on note $\Delta(u)$ la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme continu de ℓ^∞.
2. Calculer $|||\Delta|||$ (voir exercice 18).