Feuille d'exercices n° 4. Intégration.

Exercice 1
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Démontrer que : $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2
1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 3
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Démontrer que $g : t \mapsto \dfrac{\sqrt{f(t)}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4
Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 5
Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes
1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 (Intégrales de Bertrand)
Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.
1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.
3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1,\beta}$.

Exercice 7 (Changement de variable)
Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales impropres suivantes.
1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}$. *On pourra faire un changement de variables évident...*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. *On pourra faire le changement de variable* $y = \dfrac{1}{x}\ldots$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$. *On pourra faire successivement les changements de variables* $y = \sqrt{x}$ *et* $y = \cos t$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$. *On pourra faire le changement de variable* $u = \arctan x\ldots$

Exercice 8

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$, démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t + I_n$, où I_n est une intégrale que l'on précisera.
   b) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. On note

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \text{ et on considère } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par : } g(x) = \int_0^x f(t)dt - xI.$$

a) Montrer que g est de classe C^1 et T-périodique.

b) Pour $a > 0$ que dire de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)-I}{t}dt$?

c) Montrer que $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)-I}{t}dt =_{+\infty} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et une constante $A \geqslant 0$ telles que pour tout $x \geqslant 0$: $g(x) \leqslant A + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

En considérant $h : x \mapsto \exp\left(-\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(A + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que g est bornée.

Exercice 12

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = +\infty$. Démontrer que $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle les fonctions f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
   a) Démontrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Démontrer que si $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.
   c) Qu'en conclure ?

Exercice 13

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $I(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'intégrale impropre I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'elle est strictement positive.
2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, justifier de la convergence de l'intégrale impropre $I(s)$ et exprimer sa valeur en fonction de $|s|$ et I_1.
3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier, à l'aide du changement de variables $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale impropre

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u,$$

   et déterminer une relation entre I_n et J_n.
   b) Établir, pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}^*\times]0,1]$, l'inégalité : $\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| \leqslant u$.
   c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 14
Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue, décroissante, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$.

Exercice 15 (Transformée de Hardy)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue telle que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et on considère :

$$H_f : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Démontrer que H_f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction encore notée H_f.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\displaystyle\int_0^x H_f(t)^2\,\mathrm{d}t = -F(x)H_f(x) + 2\int_0^x f(t)H_f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $\displaystyle\int_0^x H_f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{I}\,\sqrt{\int_0^x H_f(t)^2\,\mathrm{d}t}$.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H_f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} H_f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4I$.

Exercice 16
Soient a et b réels, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ et telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Pour u v dans $\mathbb{R}$ on pose : $J(u,v) = \displaystyle\int_u^v f(a+x) - f(b+x)\,\mathrm{d}x$

1. Démontrer que pour tout u et v réels on a : $J(u,v) = \displaystyle\int_{u+a}^{u+b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{v+a}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(a+x) - f(b+x)\,\mathrm{d}x$ converge ainsi que la valeur de cette intégrale.

Exercice 17
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, positive, lipschitzienne de rapport k telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Démontrer que f admet une limite nulle en 0.
2. Démontrer que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 18
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier de l'existence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer que la suite (I_n) est constante.
2. Démontrer que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Lemme de Riemann-Lebesgues.
   Démontrer que si f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0$$
4. Pour t dans $]0, \frac{\pi}{2}]$ on pose $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.
   a. Démontrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$.
   b. Démontrer que $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
5. Déterminer la valeur de I à l'aide des questions précédentes.

Exercices supplémentaires

Exercice 19
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{} 0$.

Exercice 20
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive nulle en 0. Montrer que la convergence d'une des deux intégrales ci-dessous implique celle de l'autre, et comparer leurs valeurs : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21
Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 22
Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}}$.

Exercice 23
Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 24
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25
Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.