# Feuille d'exercices n° 2. Algèbre linéaire II.
# Quelques corrections

**Avertissement.** Dans toute cette feuille d'exercice, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Exercice 2**
On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on considère l'application $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T(f)(x) = \int_0^x f(4(t-t^2))dt.$$

a. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $E$.

b. $T$ est-il surjectif ? injectif ?

a) • On note $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = 4(t-t^2)$. Une étude de fonction montre que $h([0,1]) = [0,1]$. de sorte que pour $f$ dans $E$, la composée $f \circ h$ est correctement définie.
Ainsi, comme pour tout $f$ dans $E$, $f \circ h$ est continue sur $[0,1]$, $T(f)$ est correctement définie et de classe $C^1$ (théorème fondamental), et vérifie $[T(f)]' = f \circ h$.
En, particulier pour tout $f \in E$, on a $T(f) \in E$.

• La linéarité est pour le lecteur.

b) • Pour tout $f$ dans $E$, $T(f)$ est de classe $C^1$ mais il existe dans $E$ des fonctions qui ne sont pas dérivables (en donner un exemple !), donc qui ne peuvent être des images : $T(f)$ n'est pas surjectif.

• Si $f n \ker T$ alors $T(f) = 0$ donc, en dérivant, $f \circ h = 0$. Mais $h : [0,1] \to [0,1]$ est surjective : il en résulte rapidement que $f$ est nulle. Ainsi $T$ est injectif.

**Exercice 3 (Matrices à diagonales strictement dominantes)**
Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A$ vérifie la condition :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| .$$

On dit alors que $A$ est une matrice à diagonale strictement dominante.

1. a) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $(\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ |x_1| \geq |x_i|)$.
   Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.
   b) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une contradiction.
   c) En déduire que $A$ est inversible.
2. **Disques de Gershgorin.**
   Pour $i$ dans $\{1, \dots, n\}$ on pose $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $\Delta_i = D(a_{ii}, r_i) = \{x \in \mathbb{K} \mid |a_{ii} - x| \leqslant r_i\}$.
   Démontrer que si $\lambda$ valeur propre de $A$ alors $\lambda \in \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta_i$.

**Exercice 4**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de rang 1.

1. Démontrer que $A = CL$ où $C$ est une matrice colonne et $L$ une matrice ligne. Que dire de $\lambda = LC$ ?
2. Lorsque $\lambda \neq 0$, démontrer que $\frac{1}{\lambda}A$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique dont on déterminera l'image et le noyau.

**Exercice 5 (Commutant)**
Soit $E$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid [f, g] = 0\} \quad \text{(commutant de f)}$$

a. Montrer que $c(f)$ contient $\mathbb{k}[f]$ (polynômes en f).
b. On suppose qu'il existe $x$ dans $E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de $E$. Montrer que $c(f) = \mathbb{k}[f] = \mathbb{k}_{n-1}[f]$.
c. Si $f$ est nilpotent exactement d'ordre $n$, montrer que $c(f) = \mathbb{k}_{n-1}[f]$.

**Exercice 6**
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer le rang, la trace le spectre de ces matrices et donner les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Les matrices $A$ et $B$ sont-elles semblables ?

1. Ces matrices ont même trace, même rang, une seule valeur propre qui est 0 (en évidence sur la diagonale) et le sous-espace propre associé (le noyau de la matrice) est de dimension 2 dans les deux cas.
2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = 0$.
   Ces deux matrices ne sont pas semblables (car si $A \sim B$ alors $A^k \sim B^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

**Exercice 7 (Intersection d'hyperplans)**
Soient $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension $n$, $p \geqslant 1$ entier, $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ et

$$f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{k}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $f$ est surjective si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre de $E^*$.
2. Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \ker f_i$.
3. En déduire la dimension de $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \ker f_i$ lorsque $f$ est surjective.

1. • Supposons que $\varphi$ soit surjective. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

   $$\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p = 0.$$

   Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Le vecteur $e_i$ admet un antécédent $v_i$ dans $E$ et, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ on a : $g_j(v_i) = \delta_{i,j}$. Ainsi, pour tout $j$ dans $\{1, \ldots, p\}$, il vient :

   $$0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i(v_j) = \alpha_j.$$

La famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre dans $E^*$.

• Supposons que la famille $(g_1, \dots, g_p)$ soit libre dans $E^*$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\varphi$ n'est pas surjective : on a donc $\dim \operatorname{Im} f \leqslant p-1$. Ainsi $\operatorname{Im} \varphi$ est inclus dans un hyperplan $H$ de $\mathbb{R}^p$.
On considère alors une équation $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$ de cet hyperplan $H$, où $a_1, \dots, a_p$ sont des réels **non tous nuls**.
On a alors, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) \in H$, donc :

$$a_1g_1(x) + \cdots + a_pg_p(x) = 0.$$

Il en résulte que $a_1g_1 + \cdots + a_pg_p = 0$, ce qui contredit notre hypothèse sur la liberté de la famille $(g_1, \dots, g_p)$.

2. On a de suite : $\ker \varphi = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \ker g_i$.
3. Si $\varphi$ est surjective, le théorème du rang affirme que $\dim \ker f = n - p$.

**Exercice 8 (Le lemme des cinq)**
Soient $E$, $F$, $G$ des espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. On dit que la suite :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

est exacte lorsque $\operatorname{Im} f = \ker g$. On considère « l'échelle » suivante d'espaces vectoriels et d'applications linéaires où les lignes sont exactes et où les carrés sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_5} \\
F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5
\end{array}$$

On suppose que $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_4$ et $\varphi_5$ sont des isomorphismes. Montrer que $\varphi_3$ est un isomorphisme.

• Montrons que $\varphi_3$ est surjective. On veut donc démontrer que tout élément $y_3$ de $E_3$ admet un antécédent par $\varphi_3$.
Fixons $y_3$ dans $E_3$. Comme $\operatorname{Im} g_3 = \ker g_4$ on a :

$$g_4 \circ g_3(y_3) = 0 \quad (\heartsuit)$$

Mais $\varphi_4$ est un isomorphisme : il existe donc $x_4$ dans $E_4$ tel que $g_3(y_3) = \varphi_4(x_4)$. Avec $(\heartsuit)$ on obtient alors : $g_4 \circ \varphi_4(x_4) = 0$.
Comme les carrés sont commutatifs, il vient $\varphi_5 \circ f_4(x_4) = 0$. Mais $\varphi_5$ est un isomorphisme donc $f_4(x_4) = 0$ et ainsi $x_4 \in \ker f_4 = \operatorname{Im} f_3$ : il existe alors $x_3 \in E_3$ tel que $f_3(x_3) = x_4$.
On a alors $\varphi_4 \circ f_3(x_3) = \varphi_4(x_4) = g_3(y_3)$. Par commutativité des carrés, il vient :

$$g_3 \circ \varphi_3(x_3) = g_3(y_3)$$

donc, par linéarité de $g_3$, on peut dire que $y_3 - \varphi_3(x_3)$ est dans $\ker g_3 = \operatorname{Im} g_2$. On dispose alors de $y_2 \in F_2$ tel que

$$g_2(y_2) = y_3 - \varphi_3(x_3) \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

Comme $\varphi_2$ est un isomorphisme, il existe $x_2 \in E_2$ tel que $\varphi_2(x_2) = y_2$ et ainsi, avec $(\heartsuit\heartsuit)$, on obtient :

$$g_2 \circ \varphi_2(x_2) = y_3 - \varphi_3(x_3)$$

Les carrés étant commutatifs, on a donc $\varphi_3 \circ f_2(x_2) = y_3 - \varphi_3(x_3)$ et ainsi, par linéarité de $\varphi_3$ il vient le résultat tant attendu et que l'on n'espérait plus :

$$\boxed{y_3 = \varphi_3(f_2(x_2) + x_3)}$$

ce qui démontre que $\varphi_3$ est bien surjective.

• L'injectivité de $\varphi_3$ se traite de la même manière...

Exercices supplémentaires

**Exercice 9**
Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. Démontrer que $\operatorname{Im} f$ admet un supplémentaire $f$-stable si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ et que dans ce cas $\ker f$ est l'unique supplémentaire $f$-stable de $\operatorname{Im} f$.

• Supposons que que $\operatorname{Im} f$ admet un supplémentaire $f$-stable que l'on note $F$ et montrons qu'alors $F = \ker f$ (ce qui démontrera que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ puisque la somme $\operatorname{Im} f + F$ est directe).
Soit $x$ dans $F$. Comme $F$ est $f$-stable, $f(x) \in F$. Ainsi $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap F = \{0\}$ donc $x \in kerf$ et on a déjà l'inclusion $\boxed{F \subset \ker f}$.
Puis le théorème du rang affirme que $\dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f$ et de $E = \operatorname{Im} f \oplus F$ on tire $\dim F = n - \dim \operatorname{Im} f$. Il en résulte que $\ker f$ et $F$ ont même dimension et avec $F \subset \ker f$ on obtient : $\boxed{\ker f = F}$.
• Supposons maintenant que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ et montrons que $f$ admet un supplémentaire $f$-stable. Le théorème du rang affirme que $n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ ; comme $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ on en déduit que :

$$E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que $\ker f$ est $f$ stable ce qui ne pose pas de problème.

**Exercice 10 (Un résultat de factorisation)**
Soient $E$, $F$ et $G$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g \circ h = f$
(ii) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

• $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$. Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g \circ h = f$ et montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe alors $x$ dans $E$ tel que $f(x) = y$ donc $g \circ h(x) = y$ et ainsi $g(h(x)) = y$. Il en résulte que $y$ admet un antécédent par $g$ (qui est $h(x)$) donc $y \in \operatorname{Im} g$.
On a donc bien $\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g}$.

• $\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$. Supposons $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ et montrons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g \circ h = f$. On est rusé comme un singe et on se rappelle que pour définir une application linéaire il suffit de la définir sur une base.
Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$, alors pour tout $i$ dans $\{1, \ldots, n\}$ on a $f(e_i) \in \operatorname{Im} g$ et ainsi il existe $v_i$ dans $F$ tel que $f(e_i) = g(v_i)$.

Soit $h$ l'unique élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $h(e_i) = v_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors :

$$f(e_i) = g \circ h(e_i) \quad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}$$

et ainsi par linéarité il vient : $f = g \circ h$.

**Exercice 11**
Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer $\ker f$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a : $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire $\operatorname{Im} f$.
4. Soit $F$ l'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ puis que $\ker f$ et $F$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Pour le lecteur.

2. • Soit $P \in \ker f$. On a alors $P(X+1) = P(X)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il vient $P(k+1) = P(k)$ et une récurrence immédiate (à écrire) donne $P(k) = P(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi, le polynôme $Q = P - P(0)$ admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul. Il en résulte que $P$ est constant.

   • Les polynômes constant sont dans $\ker f$.

   **Conclusion.** $\ker f = \mathbb{R}_0[X]$.

3. **Question subtile et très jolie !**

   • Soit $n \geqslant 1$ entier. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En écrivant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

   Ainsi, puisque $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, on peut dire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $f$. Notons alors $f_n$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. On a clairement $\operatorname{Im} f_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après ce qui précède. De plus, le théorème du rang donne :

$$\dim \operatorname{Im} f_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker f_n.$$

   Mais il est immédiat de vérifier que $\ker f_n = \ker f \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1.
   Il en résulte que $\operatorname{Im} f_n$ est de dimension $n$. Comme $\operatorname{Im} f_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut conclure que $\operatorname{Im} f_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Cela répond à la première partie de la question puisque $\operatorname{Im} f_n = f(\mathbb{R}_n[X])$.

   • Prenons maintenant $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_N[X]$ et ainsi $Q \in \operatorname{Im} f_{n+1}$. Il existe alors $P \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ tel que $Q = f_{N+1}(P) = f(P)$, de sorte que $\mathbb{R}[X] \subset \operatorname{Im} f$. L'inclusion réciproque étant évidente, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[X]$ (ce qui prouve que $f$ est surjectif).

4. • Soit $\delta_0 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\delta_0(P) = P(0)$. Cette application est linéaire et $F = \ker \delta_0$ donc $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

   • Supposons que $\mathbb{R}[X] = F + \ker f$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On peut donc écrire $P = Q + R$ avec $Q \in F$ et $R \in \ker f = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $P(0) = R(0)$, puisque $Q \in F$. Il vient donc, comme $R$ est constant $R = P(0)$ et $Q = P - P(0)$.

   **Conclusion partielle :** si $\mathbb{R}[X] = F + \ker f$ alors $\mathbb{R}[X] = F \oplus \ker f$.

   • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $Q = P - P(0)$ et $R = P(0)$. On a de suite $P = Q + R$ ainsi que $Q \in F$ et $R \in \ker f$. Il en résulte que $\mathbb{R}[X] = F + \ker f$.

   **Conclusion.** $\mathbb{R}[X] = F \oplus \ker f$.

**Exercice 12**
Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension $n \geqslant 2$. Soit $f$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.

Démontrer qu'il existe une base $\beta$ de $E$ telle que la première colonne de la matrice de $f$ dans $\beta$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec le lemme de Schur (à redémontrer !), comme $f$ n'est pas une homothétie, il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0))$ soit une famille libre. On complète cette famille en une base $\beta$ de $E$ : cette base convient.

**Exercice 13**

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites complexes.
2. Pour tout $u$ dans $\mathcal{B}$ on note $T(u)$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ [T(u)]_n = u_{n+1}$$
   a. Démontrer que $T$ est un endomorphisme de $\mathcal{B}$.
   b. $T$ est-il injectif ? Surjectif ?
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, donner une CNS pour que $\lambda$ soit valeur propre de $T$ c'est à dire pour qu'il existe $u \in \mathcal{B}$, non nul, vérifiant
$$(*) \quad T(u) = \lambda u.$$
   Quels sont alors les vecteurs $u$ de $E$ vérifiant $(*)$ ?
4. On suppose qu'il existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$.
   a. Démontrer que $S \circ T$ est un projecteur de noyau $\ker T$ et d'image $\mathrm{Im}\, S$.
   b. $S$ est-elle injective ? Surjective ?
   c. Démontrer qu'il existe bien une telle application linéaire $S$.

1. Tout d'abord la suite constante de valeur 0 est dans $\mathcal{B}$. Puis soient $u$ et $v$ dans $\mathcal{B}$ ainsi que $\lambda$ dans $\mathbb{C}$. Comme $u$ et $v$ sont dans $\mathcal{B}$ il existe $M_1$ et $M_2$ réels tels que pour tout $n \geqslant 0$ entier on ait :
$$|u_n| \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad |u_n| \leqslant M_2.$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n + \lambda v_n| \leqslant |u_n| + |\lambda|\,|v_n| \leqslant M_1 + |\lambda|\,M_2$,
   ce qui prouve que la suite $u + \lambda v$ est bornée.

   **Conclusion.** $\boxed{\mathcal{B} \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.

2. a. • Soit $u$ dans $\mathcal{B}$. Notons $v = T(u)$. Comme $u \in \mathcal{B}$, il existe $M$ réel tel que pour tout , $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leqslant M$. Si $n \in \mathbb{N}$ on a donc : $|v_n| = |u_{n+1}| \leqslant M$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } v = T(u) \text{ est bornée}}$.

   • Prenons maintenant $u$ et $v$ dans $\mathcal{B}$ ainsi que $\lambda$ complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$[T(u + \lambda v)]_n = (u + \lambda v)_{n+1} = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = [T(u)]_n + \lambda [T(v)]_n$$
   donc $\boxed{T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v)}$.

   **Conclusion.** $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{B}}$.

   b. • Soit $u$ la suite de $\mathcal{B}$ définie par $u_0 = \sqrt{\pi}$ et $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ entier. La suite $T(u)$ est la suite nulle donc $\ker T$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (où 0 désigne la suite nulle).

   **Conclusion.** $\boxed{T \text{ n'est pas injectif}}$.

   • Soit $v$ un élément de $\mathcal{B}$. On considère la suite $u$ définie par $u_0 = \pi\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ et $u_n = v_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ entier. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ on a alors :
$$[T(u)]_n = u_{n+1} = v_n$$
   donc $T(u) = v$ et ainsi $\boxed{T \text{ est surjectif}}$.

3. • Supposons que $\lambda$ soit une valeur propre de $T$. Il existe un élément $u$ de $\mathcal{B}$, non nul, tel que :
$$T(u) = \lambda u.$$
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $[T(u)]_n = \lambda u_n$ i.e. $u_{n+1} = \lambda u_n$.
   On peut donc dire que $\boxed{\text{la suite } u \text{ est géométrique de raison } \lambda}$.

   Comme $u$ est une suite bornée, on doit avoir $|\lambda| \leqslant 1$.

En effet, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ on a $u_n = \lambda^n u_0$ donc :

$$|u_n| = |\lambda|^n |u_0|.$$

— Si $u_0 = 0$ alors $u$ est la suite nulle ce qui contredit son statut de vecteur propre de $T$.
— Ainsi $u_0 \neq 0$ et si $|\lambda| > 1$ alors $|u_n| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque la suite $u$ est bornée.

• Réciproquement, si $u$ est une suite géométrique de premier terme non nul et de raison $\lambda$ complexe tel que $|\lambda| \leqslant 1$ alors $u$ est une suite bornée et c'est un vecteur propre de $T$ pour la valeur propre $\lambda$.

**Conclusion.** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on peut dire que : $\lambda$ est valeur propre de $T$ si et seulement si $|\lambda| \leqslant 1$. Les vecteurs propres associés à $\lambda$ sont alors les suites géométriques de raison $\lambda$ et de premier terme non nul.

4. a. • On a $(S \circ T)^2 = (S \circ T) \circ (S \circ T) = S \circ (T \circ S) \circ T = S \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \circ T = S \circ T$ ce qui permet d'affirmer que $\boxed{S \circ T \text{ est un projecteur}}$.

• On a clairement $\ker T \subset \ker(S \circ T)$. Puis on a encore :

$$\ker(S \circ T) \subset \ker T \circ (S \circ T) = \ker(T \circ S) \circ T = \ker \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \circ T = \ker T.$$

Par double inclusion, on peut conclure que $\boxed{\ker T = \ker(S \circ T)}$.

• On a très facilement $\mathrm{Im}\,(S \circ T) \subset \mathrm{Im}\, S$ et, de la même manière, on a :

$$\mathrm{Im}\,(S \circ T) \circ S \subset \mathrm{Im}\,(S \circ T).$$

Or $(S \circ T) \circ S = S \circ (T \circ S) = S \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} = S$ donc $\mathrm{Im}\, S \subset \mathrm{Im}\,(S \circ T)$.
Par double inclusion, on a : $\boxed{\mathrm{Im}\,(S \circ T) = \mathrm{Im}\, S}$.

b. • $\boxed{S \text{ est injective}}$ puisque si $u \in \ker S$ alors $u = T \circ S(u) = T(0) = 0$.

• On a vu que $S \circ T$ est projecteur d'image $\mathrm{Im}\, S$ et de noyau $\ker T$ donc $\mathcal{B} = \mathrm{Im}\, S \oplus \ker T$.
Comme $\ker T$ est non trivial, $\mathrm{Im}\, S$ est strictement inclus dans $\mathcal{B}$ : $\boxed{S \circ T \text{ n'est pas surjectif}}$.

c. Pour $u$ dans $\mathcal{B}$ on considère la suite $S(u)$ définie par :

$$[S(u)]_n = u_{n-1} \quad \text{pour } n \geqslant 1 \text{ entier} \quad \text{et} \quad [S(u)]_0 = 0.$$

La suite $S(u)$ est bornée et $S$ est un endomorphisme de $\mathcal{B}$ tel que $T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$. □

**Exercice 14**
Pour $k \in \{0, \ldots, 3\}$ on considère la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$.
On pose $\mathcal{F}_3 = \mathrm{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

1. Déterminer une base $\beta$ de $\mathcal{F}_3$.
2. Soient $\alpha$ réel et $\Phi$ l'application qui à $f$ dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que $\Phi$ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.
3. Soit $\Psi$ l'application qui à $f$ dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Psi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que $\psi$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$ et préciser la matrice de $\Psi$ dans $\beta$.

1. La famille $\beta = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est libre. En effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que :

$$\sum_{i=0}^{3} \lambda_i f_i = 0.$$

**Pour tout** $x$ **réel** on a alors $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i x^i \mathrm{e}^x = 0$ et comme exp $> 0$, il vient : $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i x^i = 0$.

Il en résulte que le polynôme $\sum_{i=0}^{3} \lambda_i X^i$ a une infinité de racines : il est nul, et donc tous ses coefficients sont nuls.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille $\beta$ est donc libre et engendre $\mathcal{F}_3$ : c'est une base de $\mathcal{F}_3$.

2. Soient $\alpha$ réel et $\Phi$ l'application qui à $f$ dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Phi(f) : x \mapsto \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que $\Phi$ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.

• Notons que $\Phi$ est linéaires de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (cela résulte sans trop de difficultés de la linéarité de l'intégrale...).

• On a, pour tout $x$ réel :

$$\Phi(f_0)(x) = \int_\alpha^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^\alpha = f_0(x) - \mathrm{e}^\alpha.$$

Mais la fonction constante strictement positive $x \mapsto \mathrm{e}^\alpha$ n'est pas dans $\mathcal{F}_3$ : $\Phi(f_0) \notin \mathcal{F}_3$.

> En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $x^k \mathrm{e}^{x-\alpha} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi les éléments de $\mathcal{F}_3$ ont une limite nulle en $-\infty$ (par règle opératoire sur les limites). On peut donc en conclure qu'aucune fonction constante non nulle n'est dans $\mathcal{F}_3$.

Il en résulte que $\Phi$ n'est pas un endomorphisme de $F_3$.

3. • Montrons que $\Psi$ est linéaire. Soient $f$, $g$ dans $\mathcal{F}_3$ et $\lambda$ réel. **Pour tout** $x$ **réel** on a :

$$\begin{aligned}\Psi(f+\lambda g)(x) &= \int_{-\infty}^x (f+\lambda g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-\infty}^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Psi(f)(x) + \lambda\Psi(g)(x)\end{aligned}$$

Ainsi $\Psi(f+\lambda g) = \Psi(f) + \lambda\Psi(g)$.

• Déterminons, pour tout $k$ dans $\{0,\dots,4\}$, $\Psi(f_k)$.

Pour tout $x$ réel on a $\Psi(f_0)(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x$ donc $\Psi(f_0) = f_0$.

Puis, fixons $k$ dans $\{1,2,3\}$. Pour tout $x$ réel on a :

$$\begin{aligned}\Psi(f_k)(x) &= \int_{-\infty}^x t^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{IPP} \left[t^k\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^x - k\int_{-\infty}^x t^{k-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= x^k\mathrm{e}^x - k\int_{-\infty}^x t^{k-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De là $\Psi(f_k) = f_k - k\Psi(f_k - 1)$. Il vient donc :

- $\Psi(f_1) = f_1 - \Psi(f_0) = f_1 - f_0$
- $\Psi(f_2) = f_2 - 2\Psi(f_1) = f_2 - 2(f_1 - f_0)$
- $\Psi(f_3) = f_3 - 3\Psi(f_2) = f_3 - 3f_2 + 6f_1 - 6f_0$.

Less images des éléments de $\beta$ par $\Psi$ appartiennent donc à $\mathcal{F}_3$ : $\Psi$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.

La matrice de $\Psi$ dans $\beta$ est alors : $[f]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 15**

Soient $m$ un entier naturel strictement supérieur à 2, $n$ un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dfrac{m}{2}$. On note $J$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à $m$. Soit $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$.
On note $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide sur lequel $A$ ne s'annule pas.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$ on note $f(P)$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ : $f(P) = AP' - PA'$.

1. a) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer en fonction de $m$ et $n$ la valeur maximale $p$ du degré du polynôme $f(P)$.
   b) Montrer que $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
   c) Soit $Q$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $QA$ soit élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $f(QA)$.
   d) Montrer qu'un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_m[X]$ est dans $\ker f$, le noyau de $f$, si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $\left(\frac{P}{A}\right)'(x) = 0$.
   En déduire $\ker f$.
   e) Déterminer le rang de $f$.
2. Pour tout $i$ élément de $J$, on pose $Y_i = f\left(X^i\right)$.
   a) Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i \in J \setminus \{n\}}$ est une base de $\operatorname{Im} f$, l'image de $f$.
   b) En calculant $f(A)$, déterminer les coordonnées de $Y_n$ dans cette base.
3. a) Pour tout $i \in J$, étudier le degré du polynôme $Y_i$.
   b) Déterminer la valeur minimale du degré d'un polynôme $S$ non nul de $\operatorname{Im} f$.
   c) i) En utilisant la question 1)c), montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ divisible par $A^2$ appartient à $\operatorname{Im} f$.
      ii) En déduire qu'un polynôme $S$ de $\mathbb{R}_p[X]$ appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si le reste $R$ de la division euclidienne de $S$ par $A^2$ appartient à $\operatorname{Im} f$.
      iii) Pour tout polynôme $S$ de $\operatorname{Im} f$, déterminer alors la valeur maximale du degré de $R$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer l'ensemble des primitives sur $I$ de $x \mapsto \dfrac{S(x)}{(A(x))^2}$ avec $S = f(P)$.
5. Dans cette question, $m$ est un entier naturel strictement supérieur à 6 et $A = X^3 - X + 1$.
   a) Calculer $Y_0$, $Y_1$ et $Y_2$ et montrer que le polynôme $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ est élément de $\operatorname{Im} f$.
   b) Déterminer une primitive sur $I$ de $x \mapsto \dfrac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}$.

1. a. $f(P) = AP' - PA'$ est au plus de degré $\deg A + \deg P - 1 \leq n + m - 1$. Cette valeur est atteinte pour $P = X^m$ car le terme de plus haut degré de $f(X^m)$ est $mX^nX^{m-1} - nX^{n-1}X^m = (m-n)X^{n+m-1}$ qui est de degré $m + n - 1$ (car on a $m - n \neq 0$ puisque $m < \frac{n}{2}$).

   **Conclusion :** $\boxed{\text{La valeur maximale du degré de } f(P) \text{ est donc } p = m + n - 1}$.

   b. Par définition de $p$ à la question précédente, on a $f : \mathbb{R}_m[X] \to \mathbb{R}_p[X]$. La linéarité de $f$ est immédiate (mais à vérifier).

   **Conclusion :** $\boxed{f \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}_m[X] \text{ vers } \mathbb{R}_p[X]}$.

   c. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $QA \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on a :

   $$f(QA) = A(QA)' - (QA)A' = Q'A^2$$

   d. Soit $P$ dans $\mathbb{R}_m[X]$. Alors $P \in \ker f$ si et seulement si $AP' - PA' = 0$ i.e. (puisque $I$ est infini) si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $A(x)P'(x) - P(x)A'(x) = 0$.

   Puisque $A$ ne s'annule pas sur $I$ cette dernière assertion est équivalente à : pour tout $x \in I$, $\dfrac{A(x)P'(x) - P(x)A'(x)}{(A(x))^2} = 0$
   ce qui signifie exactement que pour tout $x \in I$, $\left(\frac{P}{A}\right)'(x) = 0$.
   Il vient donc $P \in \ker f$ **si et seulement si** (puisque $I$ est un intervalle) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on a $\frac{P(x)}{A(x)} = \lambda$ **si et seulement si** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on a $P(x) = \lambda A(x)$ i.e. ( car $I$ est infini) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda A$.
   **Conclusion :** $\boxed{\ker f = \operatorname{vect}(A)}$.

   e. D'après la formule du rang, et comme on vient de voir que $\dim \ker f = 1$ (car $A \neq 0$), il vient que $\boxed{\operatorname{rg}(f)} = \dim \mathbb{R}_m[X] - 1 \boxed{= m}$.

2. a. La famille $\left(1, X, ..., X^{n-1}, A, X^{n+1}, ..., X^m\right)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$ car les degrés sont échelonnés de 0 à $m$. Il vient :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \operatorname{vect}\left(f(1), f(X), ..., f\left(X^{n-1}\right), f(A), f\left(X^{n+1}\right), ..., f\left(X^m\right)\right)\\ &= \operatorname{vect}\left(f(1), f(X), ..., f\left(X^{n-1}\right), 0, f\left(X^{n+1}\right), ..., f\left(X^m\right)\right)\\ &= \operatorname{vect}\left(f\left(X^i\right)\right)_{i\in J\setminus\{n\}} = \operatorname{vect}\left(Y_i\right)_{i\in J\setminus\{n\}}\end{aligned}$$

la famille de $m-1$ vecteurs $(Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$ engendre donc $\operatorname{Im} f$ qui est de dimension $m-1$, donc

$$\boxed{\left(f\left(X^i\right)\right)_{i\in J\setminus\{n\}} = (Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}} \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}.$$

b. On a $f(A) = 0$ d'une part. Or d'autre part :

$$\begin{aligned}f(A) &= f\left(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0\right)\\ &= f\left(X^n\right) + a_{n-1}f\left(X^{n-1}\right) + ... + a_1f(X) + a_0f(1)\\ &= Y_n + a_{n-1}Y_{n-1} + ... + a_1Y_1 + a_0Y_0\end{aligned}$$

Il vient ainsi :
$\boxed{Y_n = -a_0Y_0 - a_1Y_1 - ... - a_{n-1}Y_{n-1} + 0.Y_{n+1} + ... + 0.Y_m}$.

3. a. Pour tout $i \in J$ on a $Y_i = iAX^{i-1} - A'X^i$ qui est un polynôme de degré au plus $n+i-1$ ($\geq 0$ car $n \geq 1$) et dont le terme de degré $n+i-1$ est $(i-n)X^{n+i-1}$. Ainsi $\boxed{\text{pour tout } i \in J\setminus\{n\}\ Y_i \text{ est de degré } n+i-1}$ (car $i - n \neq 0$).

Maintenant pour $i = n$ on a $Y_n = -a_0Y_0 - a_1Y_1 - ... - a_{n-1}Y_{n-1}$ et (on vient de le dire) $\deg Y_0 = n-1 < \deg Y_1 = n < ... < \deg Y_{n-1} = 2n-2$. Ainsi :

— **premier cas**, $a_0 = ... = a_{n-1} = 0$ (i.e. $A = X^n$) alors $Y_n = 0$ et $\boxed{\deg Y_n = -\infty}$.

— **deuxième cas**, il existe $k \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $a_k \neq 0$ (i.e. $A \neq X^n$) alors $\boxed{\deg Y_n = n - 1 + \max\{k \in \{0, .., n-1\} / a_k \neq 0\}}$.

b. Si $S \in (\operatorname{Im} f)\setminus\{0\}$, alors $S = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{m} b_iY_i$ où $(b_0, ..., b_{n-1}, b_{n+1}, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ ; or

$$\begin{aligned}\deg Y_0 &= n-1 < ... < \deg Y_{n-1} = 2n-2 < \underbrace{\deg Y_{n+1}}_{=2n}\\ &< ... < \deg Y_m = n+m-1\end{aligned}$$

donc $\deg S = \deg Y_k\ (= n+k-1)$ où $k = \max\{i \in J\setminus\{n\} / b_i \neq 0\}$ ; en particulier $\deg S \geq n-1$. Comme de plus $\deg Y_0 = n-1$ (et $Y_0 \in \operatorname{Im} f$), on peut donc dire que **la valeur minimale du degré d'un polynôme non nul de Im $f$ est** $n-1$.

c. i. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ divisible par $A^2$. On dispose de $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = A^2Q_1$$

Si on prend alors un polynôme $Q$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = Q_1$ ($Q$ est une primitive de $Q_1$), on a en premier lieu $QA \in \mathbb{R}_m[X]$ car $\deg P = 2\deg A + \deg Q_1 \leq p$ donc $\deg Q_1 \leq p-2n$ d'où $\deg Q \leq p - 2n + 1 = m + n - 1 - 2n + 1 = m - n$ et ainsi

$$\deg AQ = \deg A + \deg Q = n + \deg Q \leq m$$

Il vient donc, avec la question 1.c. $f(AQ) = A^2Q' = A^2Q_1 = P$.

**Conclusion.** $\boxed{P \in \operatorname{Im} f}$.

ii. Soit $S \in \mathbb{R}_p[X]$. Soit $R$ le reste de la division euclidienne de $S$ par $A^2$, $Q$ le quotient. On a $S = A^2Q + R$. Comme $S \in \mathbb{R}_p[X]$ on a $A^2Q \in \mathbb{R}_p[X]$, et $A^2Q$ est divisible par $A^2$, donc, avec la question précédente, $A^2Q \in \operatorname{Im} f$. Ainsi :

$$S \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow S - A^2Q \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow R \in \operatorname{Im} f$$

iii. Soit $S \in \operatorname{Im} f$. $R$ étant le reste de la division euclidienne de $S$ par $A^2$ on a $\deg R < \deg A^2 = 2n$. De plus $R \in \operatorname{Im} f$ donc $R$ est combinaison linéaire de $Y_i$ avec $i \in J \setminus \{n\}$ on a une famille $(b_i)_{i \in J \setminus \{n\}}$ de réels tels que $R = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{m} b_i Y_i$. Mais comme

$$\begin{aligned} \deg Y_0 = n-1 \quad &< \quad \deg Y_1 = n < ... < \deg Y_{n-1} = 2n-2 \\ &< \deg Y_{n+1} = 2n < ... \qquad ... < \underbrace{\deg Y_m}_{=n+m-1} \end{aligned}$$

et que $\deg R \leq 2n-1$, il vient que $b_{n+1} = ... = b_m = 0$ et donc que $R = \sum_{i=0}^{n-1} b_i Y_i$ et donc $\deg R \leq 2n-2$. Si on ajoute que pour $S = Y_{n-1}$ on a $R = Y_{n-1}$ de degré $2n-2$, on en conclut que :

$$\boxed{\text{la valeur maximale du degré de } R \text{ est } 2n-2}.$$

4. On a pour tout $x \in I$,

$$\frac{S(x)}{(A(x))^2} = \frac{A(x)P'(x) - P(x)A'(x)}{(A(x))^2} = \left(\frac{P}{A}\right)'(x)$$

donc les primitives sur $I$ de $x \mapsto \dfrac{S(x)}{(A(x))^2}$ sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{P(x)}{A(x)} + \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}.$$

5. a. On a :
   — $Y_0 = -A' = -3X^2 + 1$
   — $Y_1 = A - A'X = \left(X^3 - X + 1\right) - \left(3X^2 - 1\right)X = -2X^3 + 1$
   — $Y_2 = 2XA - A'X^2$ donc :

$$Y_2 = 2X\left(X^3 - X + 1\right) - \left(3X^2 - 1\right)X^2 = -X^4 - X^2 + 2X.$$

   et $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1 = -\left(-X^4 - X^2 + 2X\right) - 2\left(-2X^3 + 1\right) + \left(-3X^2 + 1\right)$ donc $S = -Y_2 - 2Y_1 + Y_0$ d'où $\boxed{S \in \operatorname{Im} f}$.

   b. Avec la question précédente on a $S = f\left(-X^2 - 2X + 1\right)$ ; une primitive sur $I$ de $x \mapsto \dfrac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2} = \dfrac{S(x)}{(A(x))^2}$ est donc, avec la question 4)

$$\boxed{x \mapsto \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^3 - x + 1}}$$

**Exercice 16**

Dans tout l'exercice, $n$ et $N$ désignent des entiers supérieurs à 2.

1. On note $H_n$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Justifier que $H_n$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
   b) Trouver un supplémentaire de $H_n$.
2. Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $N$ et $f$ une forme linéaire sur $E$.
   a) Soit $g$ une forme linéaire sur $E$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
      (1) Il existe $\lambda$ réel tel que $f = \lambda g$.
      (2) $\ker g \subset \ker f$.

b) Démontrer par récurrence sur $p$ que si $g_1, \dots, g_p$ sont des formes linéaires sur $E$ telles que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker g_i \subset \ker f$ alors $f \in \text{vect}(g_1, \dots, g_p)$.

c) On suppose dans cette question que $n < N$.
En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que si $g_1, \dots, g_n$ sont des formes linéaires indépendantes sur $E$ alors :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i\right) = N - n.$$

1. a) tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle (puisque $\text{tr}(I_n) = n$). Par le théorème du rang $H_n = \ker \text{tr}$ est de dimension $n^2 - 1$.

   b) Toute droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendrée par une matrice de trace non nulle est un supplémentaire de $H_n$. En particulier $\text{vect}(I_n)$ est un supplémentaire de $H_n$.

   En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$.
   — Si $M \in H_n \cap \text{vect}(A)$ alors $\text{tr}(M) = 0$ et il existe $\lambda$ réel tel que $M = \lambda A$. Comme $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$, il vient $\lambda = 0$ , puisque $\text{tr}(A) \neq 0$, et ainsi $M = 0$. De là : $H_n \cap \text{vect}(A) = \{0\}$.
   — $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim H_n + \dim \text{vect}(A)$
   Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H_n \oplus \text{vect}(A)$.

2. a) • (1) $\Rightarrow$ (2). On suppose qu'il existe $\lambda$ réel tel que $f = \lambda g$. Si $x \in \ker g$ alors :

   $$f(x) = \lambda g(x) = 0,$$

   donc $x \in \ker f$.

   • (2) $\Rightarrow$ (1). On suppose $\ker g \subset \ker f$. Si $\ker g = E$, on a $f = g = 0$ et la conclusion est immédiate.
   Sinon, il existe $x_0 \in E$ tel que $g(x_0) \neq 0$. On a alors facilement (à montrer) :

   $$E = \ker g \oplus \text{vect}(x_0).$$

   Posons $h = f(x_0)g - g(x_0)f$. Soit $x \in E$. On écrit $x = y + \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ selon la somme directe $E = \ker g \oplus \text{vect}(x_0)$. Par hypothèse on a $f(y) = 0$ donc :

   $$h(x) = f(x_0)\big(\underbrace{g(y)}_{=0} + g(x_0)\big) - g(x_0)\big(\underbrace{f(y)}_{=0} + g(f_0)\big) = 0.$$

   Cela étant vrai quelque soit le choix de $x$ dans $E$, il vient $h = 0$ et ainsi :

   $$f = \underbrace{\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}_{\in \mathbb{R}} g.$$

   b) On considère, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(p)$ : « *Si $F$ est une espace vectoriel réel de dimension finie, si $f$ est une forme linéaire sur $F$ et si $g_1, \dots, g_p$ sont des formes linéaires sur $F$ telles que* $\bigcap_{i=1}^{p} \ker g_i \subset \ker f$ *alors* $f \in \text{vect}(g_1, \dots, g_p)$. »

   • La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie, d'après la question précédente.

   • Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai pour un certain entier naturel $p \geqslant 1$. Supposons que $F$ est un espace vectoriel réel et que $g_1, \dots, g_{p+1}$ et $f$ sont des formes linéaires sur $F$ telles que $\bigcap_{i=1}^{p+1} \ker g_i \subset \ker f$.

   — Si $g_{p+1}$ est la forme nulle alors $\ker g_{p+1} = F$ et alors $\bigcap_{i=1}^{p+1} \ker g_i = \bigcap_{i=1}^{p} \ker g_i$, donc $\bigcap_{i=1}^{p} \ker g_i \subset \ker f$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence d'où $f \in \text{vect}(g_1, \dots, p_n) = \text{vect}(g_1, \dots, g_{p+1})$.

— On suppose maintenant que $g_{p+1}$ n'est pas la forme nulle. Alors $\ker g_{p+1}$ est un hyperplan de $F$. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on note $h_i$ la restriction de $g_i$ à $\ker g_{p+1}$, ainsi que $h$ la restriction de $f$ à $\ker g_{p+1}$. Il s'agit de formes linéaires sur l'espace vectoriel de dimension finie $\ker g_{p+1}$.
Soit maintenant $x \in \ker g_{p+1}$.
On suppose que $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker h_i$. On a alors $g_i(x) = h_i(x) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ donc $x \in \bigcap_{i=1}^{p+1} \ker g_i \subset \ker f$. Ainsi $f(x) = 0$ donc $h(x) = 0$.
Il en résulte que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker h_i \subset \ker h$.
On applique l'hypothèse de récurrence avec l'espace vectoriel $\ker g_{p+1}$. On a donc : $h \in \text{vect}(h_1, \dots, h_p)$ : il existe ainsi $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que $h = \sum_{k=1}^{p} \alpha_i h_i$.
Pour tout $x \in \ker g_{p+1}$ on a donc :

$$f(x) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_i g_i(x) = h(x) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_i h_i(x) = 0,$$

de sorte que $\ker g_{p+1} \subset \ker\left(f - \sum_{k=1}^{p} \alpha_i g_i\right)$. D'après la question précédente, il existe $\alpha_{p+1}$ réel tel que :

$$f - \sum_{k=1}^{p} \alpha_i g_i = \alpha_{p+1} g_{p+1}.$$

Cela permet de conclure que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

c) Soient $g_1, \dots, g_p$ des formes linéaires indépendantes sur $E$. Comme $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension $n$, on peut compléter la famille libre $(g_1, \dots, g_p)$ en une base $\beta = (g_1, \dots, g_n)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On a alors la suite d'inclusions :

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i}_{=F_0} \subset \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker g_i}_{F_1} \subset \cdots \subset \underbrace{\ker g_1}_{=F_{n-1}} \subset E.$$

Supposons un instant qu'il existe $k \in \{0, \dots, n-2\}$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{n-k} \ker g_i = \bigcap_{i=1}^{n-(k+1)} \ker g_i.$$

On a alors $\bigcap_{i=1}^{n-(k+1)} \ker g_i \subset \ker g_{n-k}$, et selon la question 2b, $g_{n-k} \in \text{vect}(g_1, \dots, g_{n-(k+1)})$, ce qui est absurde, par liberté des éléments de $\beta$.
De plus $g_n$ n'est pas la forme nulle, donc les inclusions :

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset E$$

sont strictes. De là :

$$\dim F_0 < \dim F_1 < \cdots < \dim F_{n-1} < n.$$

Cela force $\dim F_k = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et on peut donc conclure.