Feuille d'exercices n° 2. Algèbre linéaire II.

Avertissement. Dans toute cette feuille d'exercice, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1
Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'application $P : E \to E$ définie par : $P(u) = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est linéaire et justifier que P est bien à valeurs dans E.
2. L'endomorphisme P est-il injectif ? surjectif ?
3. Déterminer les valeurs propres de P i.e. les réels λ pour lesquels il existe $u \neq 0$ dans E tel que $P(u) = \lambda u$.

Exercice 2
On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on considère l'application $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T(f)(x) = \int_0^x f(4(t-t^2))dt.$$

a. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.

b. T est-il surjectif ? injectif ?

Exercice 3 (Matrices à diagonales strictement dominantes)
Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A vérifie la condition :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,,\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|\,.$$

On dit alors que A est une matrice à diagonale strictement dominante.

1. a) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0,\ AX = 0$ et $(\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,,\ |x_1| \geq |x_i|)$.
   Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.

   b) On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une contradiction.

   c) En déduire que A est inversible.
2. **Disques de Gershgorin.**
   Pour i dans $\{1, \ldots, n\}$ on pose $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et $\Delta_i = D(a_{ii}, r_i) = \{x \in \mathbb{K} \mid |a_{ii} - x| \leqslant r_i\}$.
   Démontrer que si λ valeur propre de A alors $\lambda \in \displaystyle\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta_i$.

Exercice 4
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ de rang 1.

1. Démontrer que $A = CL$ où C est une matrice colonne et L une matrice ligne. Que dire de $\lambda = LC$?
2. Lorsque $\lambda \neq 0$, démontrer que $\frac{1}{\lambda}A$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique dont on déterminera l'image et le noyau.

Exercice 5 (Commutant)
Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid [f, g] = 0\} \quad \text{(commutant de f)}$$

a. Montrer que $c(f)$ contient $\mathbb{k}[f]$ (polynômes en f).

b. On suppose qu'il existe x dans E tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E. Montrer que $c(f) = \mathbb{k}[f] = \mathbb{k}_{n-1}[f]$.

c. Si f est nilpotent exactement d'ordre n, montrer que $c(f) = \mathbb{k}_{n-1}[f]$.

Exercice 6
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer le rang, la trace le spectre de ces matrices et donner les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 7 (Intersection d'hyperplans)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension n, $p \geqslant 1$ entier, $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ et

$$f = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{k}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array} \right).$$

1. Démontrer que f est surjective si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille libre de E^*.
2. Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \ker f_i$.
3. En déduire la dimension de $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \ker f_i$ lorsque f est surjective.

Exercice 8 (Le lemme des cinq)
Soient E, F, G des espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. On dit que la suite :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

est exacte lorsque $\operatorname{Im} f = \ker g$. On considère « l'échelle » suivante d'espaces vectoriels et d'applications linéaires où les lignes sont exactes et où les carrés sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_5} \\ F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5 \end{array}$$

On suppose que φ_1, φ_2, φ_4 et φ_5 sont des isomorphismes. Montrer que φ_3 est un isomorphisme.

Exercices supplémentaires

Exercice 9
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. Démontrer que $\operatorname{Im} f$ admet un supplémentaire f-stable si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ et que dans ce cas $\ker f$ est l'unique supplémentaire f-stable de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 10 (Un résultat de factorisation)
Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $h \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $g \circ h = f$
(ii) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer $\ker f$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a : $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire $\operatorname{Im} f$.
4. Soit F l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ puis que $\ker f$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 12
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension $n \geqslant 2$. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.
Démontrer qu'il existe une base β de E telle que la première colonne de la matrice de f dans β soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites complexes.
2. Pour tout u dans $\mathcal{B}$ on note $T(u)$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ [T(u)]_n = u_{n+1}$$
   a. Démontrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{B}$.
   b. T est-il injectif ? Surjectif ?
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, donner une CNS pour que λ soit valeur propre de T c'est à dire pour qu'il existe $u \in \mathcal{B}$, non nul, vérifiant
$$(*) \quad T(u) = \lambda u.$$
   Quels sont alors les vecteurs u de E vérifiant $(*)$?
4. On suppose qu'il existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$.
   a. Démontrer que $S \circ T$ est un projecteur de noyau $\ker T$ et d'image $\operatorname{Im} S$.
   b. S est-elle injective ? Surjective ?
   c. Démontrer qu'il existe bien une telle application linéaire S.

Exercice 14
Pour $k \in \{0, \dots, 3\}$ on considère la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$.
On pose $\mathcal{F}_3 = \operatorname{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

1. Déterminer une base β de $\mathcal{F}_3$.

2. Soient α réel et Φ l'application qui à f dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que Φ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.
3. Soit Ψ l'application qui à f dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Psi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Démontrer que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$ et préciser la matrice de Ψ dans β.

Exercice 15

Soient m un entier naturel strictement supérieur à 2, n un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dfrac{m}{2}$. On note J l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à m. Soit $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide sur lequel A ne s'annule pas.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$ on note $f(P)$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$: $f(P) = AP' - PA'$.

1. a) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer en fonction de m et n la valeur maximale p du degré du polynôme $f(P)$.
   b) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
   c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que QA soit élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $f(QA)$.
   d) Montrer qu'un polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$ est dans $\ker f$, le noyau de f, si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $\left(\dfrac{P}{A}\right)'(x) = 0$.
   En déduire $\ker f$.
   e) Déterminer le rang de f.
2. Pour tout i élément de J, on pose $Y_i = f\left(X^i\right)$.
   a) Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i\in J\setminus\{n\}}$ est une base de $\operatorname{Im} f$, l'image de f.
   b) En calculant $f(A)$, déterminer les coordonnées de Y_n dans cette base.
3. a) Pour tout $i \in J$, étudier le degré du polynôme Y_i.
   b) Déterminer la valeur minimale du degré d'un polynôme S non nul de $\operatorname{Im} f$.
   c) i) En utilisant la question 1)c), montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ divisible par A^2 appartient à $\operatorname{Im} f$.
      ii) En déduire qu'un polynôme S de $\mathbb{R}_p[X]$ appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si le reste R de la division euclidienne de S par A^2 appartient à $\operatorname{Im} f$.
      iii) Pour tout polynôme S de $\operatorname{Im} f$, déterminer alors la valeur maximale du degré de R.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer l'ensemble des primitives sur I de $x \mapsto \dfrac{S(x)}{(A(x))^2}$ avec $S = f(P)$.
5. Dans cette question, m est un entier naturel strictement supérieur à 6 et $A = X^3 - X + 1$.
   a) Calculer Y_0, Y_1 et Y_2 et montrer que le polynôme $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ est élément de $\operatorname{Im} f$.
   b) Déterminer une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}$.

Exercice 16

Dans tout l'exercice, n et N désignent des entiers supérieurs à 2.

1. On note H_n l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Justifier que H_n est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
   b) Trouver un supplémentaire de H_n.
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension N et f une forme linéaire sur E.
   a) Soit g une forme linéaire sur E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
      (1) Il existe λ réel tel que $f = \lambda g$.
      (2) $\ker g \subset \ker f$.
   b) Démontrer par récurrence sur p que si $g_1, \ldots, g_p$ sont des formes linéaires sur E telles que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \ker g_i \subset \ker f$ alors $f \in \operatorname{vect}(g_1, \ldots, g_p)$.
   c) On suppose dans cette question que $n < N$.
   En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que si $g_1, \ldots, g_n$ sont des formes linéaires indépendantes sur E alors :
   $$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i\right) = N - n.$$