Feuille d'exercices n° 1. Algèbre linéaire I.

Exercice 11

1. *Supplémentaires dans* $\mathbb{R}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}^n$. Soient $D = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{e\}$ où $e = (1, 1, ..., 1)$ et $H = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$. Montrer que D et H sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (pour les lois usuelles). Soient $a \in \mathbb{R}$, $F_0 = \{f \in E, f(a) = 0\}$, G_0 l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
   Établir que F_0 et G_0 sont deux sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires dans E.

1. On vérifie que $H \cap D = \{0\}$. Mais H est un hyperplan de E (noyau d'une forme linéaire non nulle), donc $\dim H + \dim D = \dim E$. On peut donc conclure que :
$$E = H \oplus D.$$

2. Ici on est en dimension infinie. Dans ce cas, il est plutôt judicieux de raisonner par analyse/synthèse.

   Tout d'abord $F_0 = \ker \delta_a$ où δ_a est la forme linéaire $f \mapsto f(a)$: c'est donc un sous-espace vectoriel de E.
   Puis $G_0 = \text{vect}(1)$ où 1 est la fonction constante de valeur 1.

   Analyse. On suppose que $E = F_0 + G_0$. Soit h dans E. Il existe alors $f \in F_0$ et $g \in G_0$ telles que :
$$h = f + g.$$
   On a alors $h(a) = f(a) + g(a) = g(a)$. Ainsi :
$$(S) \begin{cases} g = h(a) \\ f = h - h(a) \end{cases} .$$
   On vient de démontrer que : **SI** la décomposition existe, elle est unique et elle est donnée par (S).

   Synthèse. Soit h dans E. On définit deux éléments f et g de E grâce à (S). On a alors : $h = f + g$ avec $f \in F_0$ et $g \in G_0$. Il en résulte que $E = F_0 + G_0$.

   Conclusion. $E = F_0 \oplus G_0$.

Exercice 12

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geqslant 1$ et $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tels que pour tout (i, j) dans $\{1, \ldots, n\}^2$ on ait $u_i \circ u_j = \delta_i^j u_i$.

1. On pose $E_i = \text{Im}\, u_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Démontrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
2. Qu'en déduire pour le rang de chaque u_i ?

Ici δ_i^j est le symbole de Kronecker (égal à 1 si $i = j$ et égal à 0 sinon).

1. • Montrons que la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe. Soient $y_1, \ldots, y_n$ dans $E_1 \rtimes \cdots \times E_n$ tels que :
$$y_1 + \cdots + y_n = 0.$$
   Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u_i(x_i)$. On a donc $\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) = 0$et ainsi, pour tout $k \in \{, \ldots, n\}$, il vient :
$$u_k \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \right) = 0 \text{ i.e. } \sum_{i=1}^{n} u_k \circ u_i(x_i) = 0.$$

On obtient donc $u_k(x_k) = 0$ i.e. $y_k = 0$ pour tout $k \in \{, \dots, n\}$

La somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est donc directe.

• On a

$$n \geqslant \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\dim E_i}_{\geqslant 1} \geqslant n.$$

Ainsi $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = n$ donc $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

2. Cela force $\mathrm{rg}(u_i) = 1\dots$

Exercice 13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Raisonnons par *analyse/synthèse.*

• *Analyse.* Supposons que $E = \ker f + \mathrm{Im}\, f$. Soit x dans E. Il existe donc y dans $\ker f$ et z dans $\mathrm{Im}\, f$ tels que :

$$x = y + z.$$

Ainsi $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$. Comme $z \in \mathrm{Im}\, f$, il existe x' dans E tel que $z = f(x')$. Il en résulte que :

$$f(x) = f^2(x').$$

Mais $f^2 = f^3 - f$. Ainsi $f(x) = f^3(x') - f(x') = f^2(x) - z$ ce qui amène :

$$(\heartsuit) \begin{cases} z = f^2(x) - f(x) \\ y = x + f(x) - f^2(x) \end{cases}$$

Conclusion partielle. Si $E = \ker f + \mathrm{Im}\, f$, alors la somme est en fait directe, puisque un élément x de E se décompose de manière unique selon $\ker f + \mathrm{Im}\, f$.

• *Synthèse.* Soit x dans E. On définit alors y et z dans E via $(\heartsuit)$. On a alors

$$\begin{cases} z = f^2(x) - f(x) = f(f(x) - x) \in \mathrm{Im}\, f \\ f(y) = f(x) + f^2(x) - f^3(x) = 0, \text{ puisque } f^3 = f^2 + f, \text{ donc } y \in \ker f \end{cases}.$$

Conclusion. Tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un élément de $\ker f$ et d'un élément de $\mathrm{Im}\, f$, ce qui assure, avec l'analyse, que : $\boxed{E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f}$. □

Exercice 14 (Lemme de Fitting)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que les suite $\mathrm{Im}\,(u^n)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^n)$ sont monotones et constantes à partir d'un certain rang N (pour l'inclusion). Montrer alors que $E = \mathrm{Ker}\,(u^N) \oplus \mathrm{Im}\,(u^N)$.
2. Démontrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^N)$ et $G = \mathrm{Im}\,(u^N)$ sont stables par u. On note $g = u\,|_F^F$ et $h = u\,|_G^G$. Démontrer que g est nilpotent et h inversible.
3. Déduire des questions précédente que toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$$

où N est une matrice carrée nilpotente et C une matrice carrée inversible.

1. • Soit n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in \ker u^n$ alors $u^n(x) = 0$ donc $u(u^n(x)) = 0$ et ainsi $u^{n+1}(x) = 0$. Il en résulte que $x \in \ker u^{n+1}$ ce qui assure que $\ker u^n \subset \ker u^{n+1}$.

Conclusion partielle. $\boxed{\text{La suite } (\ker u^n) \text{ est croissante pour l'inclusion}}$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dim \ker u^n$. La suite (d_n) est croissante, majorée par $\dim E$: elle est convergente. Or toute suite dans $\mathbb{Z}$ qui converge est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).

En effet, soit (x_n) une suite dans $\mathbb{Z}$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Il existe alors N entier tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :

$$|x_n - \ell| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Or, l'intervalle $[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}]$ est de longueur $\dfrac{1}{2}$: il ne peut contenir qu'un seul entier. Cela implique que, pour tout $n \geqslant N$ on a : $x_n = x_N$. □

Ainsi, on dispose de N entier tel que $d_n = d_N$ si $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant N$, on a donc $\ker u^N \subset \ker u^n$ et $\dim u^N = \dim u^n$: il en résulte que les sous-espaces $\ker u^n$ sont tous égaux dès que $n \geqslant N$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \operatorname{Im} f^{n+1}$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f^{n+1}(x') = f^n(f(x')) \in \operatorname{Im} f^n$. Ainsi $\boxed{\operatorname{Im} f^n \supset \operatorname{Im} f^{n+1}}$.
Puis **le théorème du rang** affirme que, si $n \geqslant N$:

$$\dim \operatorname{Im} f^n = \dim E - d_n = \dim E - d_N = \dim \operatorname{Im} f^N,$$

et $\operatorname{Im} f^N \supset \operatorname{Im} f^n$. Ainsi, si $n \geqslant N$ on a $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^N$.

Conclusion. La suite $(\ker u^n)$ est croissante pour l'inclusion, la suite $(\operatorname{Im} u^n)$ est décroissante pour l'inclusion et ces deux suites sont stationnaire à partir d'un même rang N.

• Montrons maintenant que $E = \ker u^N \oplus \operatorname{Im} u^N$.
Si $y \in \ker u^N \cap \operatorname{Im} u^N$, alors $u^N(y) = 0$ et il existe x dans E tel que $y = u^N(x)$; ainsi $u^{2N}(x) = 0$ donc $x \in \ker u^{2N} = \ker u^N$ d'où $y = u^N(x) = 0$. On a donc $\ker u^N \cap \operatorname{Im} u^N = \{0\}$: $\boxed{\text{la somme } \ker u^N + \operatorname{Im} u^N \text{ est directe}}$.

Puis le théorème du rang assure que $\dim E = \dim \operatorname{Im} u^N + \dim \ker u^N$. Ainsi on a bien :

$$\boxed{E = \ker u^N \oplus \operatorname{Im} u^N}.$$

2. • Montrons que F et G sont stables par u.
Soit x dans F. On a donc $u^N(x) = 0$ et ainsi $0 = u(u^N(x)) = u^N(u(x)$, donc $u(x) \in F$: F est stable par u.
Soit y dans G. Il existe x dans E tel que $y = u^N(x)$. Ainsi $u(y) = u^N(u(x)) \in \operatorname{Im} u^N = G$: G est stable par u.

• Montrons que g est nilpotent. Soit x dans F. On a $h^N(x) = u^N(x)$, par définition de h. Comme $F = \ker u^N$, on a $h^N(x) = 0$, ce qui assure que $\boxed{h \text{ est nilpotent}}$.

• Montrons que h est inversible. Soit y dans $\ker h$. Comme $y \in \operatorname{Im} u^N$, il existe x dans E tel que $y = u^N(x)$. Ainsi :

$$0 = h(y) = u^{N+1}(x).$$

Il en résulte que $x \in \ker u^{N+1} = \ker u^N$, donc $y = 0$. Ainsi $\ker h = \{0\}$, ce qui signifie que h est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : $\boxed{h \text{ est inversible}}$.

3. Rappelons le résultat essentiel suivant : *deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

Soit M dans $M_n(\mathbb{K})$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On applique à cet endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ les résultats des deux questions précédentes, d'où, avec les notations

précédentes, F et G ainsi que g et h.
Soit β une base de F et γ une base de G. Notons $N = [g]_\beta$ et $C = [h]_\gamma$. Comme g est nilpotent, N est nilpotente. Comme h est inversible, C est inversible. Enfin, comme $E = F \oplus G$, la famille $\mathcal{B} = Rec(\beta, \gamma)$ est une base de E et, toujours selon le cours :

$$[u]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Cela assure que M est semblable à $\begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$. □

Exercices supplémentaires

Exercice 15
Soient F et G les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0 \text{ et } x+y=0\right\} \text{ et } G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\}.$$

1. Démontrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en en déterminer la dimension ainsi qu'une base. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

1. • Utilisons nos connaissances de terminale. F est une droite vectorielle de paramétrisation $\begin{cases} x = -\frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{cases}$.

Ainsi F est un sous-espace vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et une base de F est donnée par un vecteur directeur de cette droite, par exemple $\varepsilon_1 = (-2,2,1)$.

• G est le noyau de la forme linéaire $g : (x,y,z) \mapsto x-y+z$. Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Puis les vecteurs $\varepsilon_2 = (1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (1,0,-1)$ sont dans G et ne sont pas colinéaires : $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de G.

• On a $F \subset G$ donc $F \cap G = F$ et $F \cup G = G$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de f.
Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M. Comme C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles, $\text{rg}M \geqslant 2$. Puis $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$, donc $\text{rg}(M) \leqslant 2$. Le théorème du rang affirme alors que $\ker f$ est de dimension 1.
Puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0$. Il en résulte que $\ker f = \text{vect}(1,-2,1)$.
Puis $\text{Im } f = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2))$ puisque $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $f(e_1) = \varepsilon_2$ et $f(e_2) = \varepsilon_3$. Ainsi, comme $\text{Im } f$ est de dimension 2, une base de $\text{Im } f$ est $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, donc $\text{Im } f = F$.

Exercice 16
Deux projecteurs. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q des projecteurs de E

1. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   (i) $p+q$ est un projecteur.
   (ii) $p \circ q + q \circ p = 0$.
   (iii) $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose désormais que l'une de ces conditions est réalisée.
   a) Montrer que $\text{Im}\,(p) \subset \ker(q)$ et $\text{Im}\,(q) \subset \ker(p)$.
   b) Montrer que $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
   c) Montrer que $\text{Im}\,(p+q) = \text{Im}\,(p) \oplus \text{Im}\,(q)$.

Exercice 17 (Corps des quaternions)
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on considère l'ensemble $\mathbb{H}$ (comme *Hamilton*)des matrices de la forme $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}$ où $(m,n) \in \mathbb{C}^2$.

1. a) Montrer que $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{m} & -n \\ \overline{n} & m \end{pmatrix} = \left(|m|^2+|n|^2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un « corps non commutatif »(pour l'addition et la multiplication induites par celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$). $\mathbb{H}$ est appelé le *corps des quaternions*.
2. a) $\mathbb{H}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
   b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que les quatre matrices
   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
   constituent une base de $\mathbb{H}$.
   c) Calculer, dans cette base, tous les produits $e_i e_j$.

1)a) Pour tout $(m,n) \in \mathbb{C}^2$ on a

$$\boxed{\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{m} & -n \\ \overline{n} & m \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} m\overline{m}+n\overline{n} & -mn+nm \\ -\overline{n}\overline{m}+\overline{m}\overline{n} & n\overline{n}+m\overline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |m|^2+|n|^2 & 0 \\ 0 & |m|^2+|n|^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \left(|m|^2+|n|^2\right)1_2}$$

1)b) $(\mathcal{Q},+,\times)$ est un « corps non commutatif » car :
— $(\mathcal{Q},+,\times)$ est un anneau car c'est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puisque :
— $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$,
— $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$,
— et pour tout $A = \begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m' & n' \\ -\overline{n'} & \overline{m'} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$ on a :
— $A+B = \begin{pmatrix} m+m' & n+n' \\ -\overline{n}-\overline{n'} & \overline{m}+\overline{m'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+m' & n+n' \\ -\overline{n+n'} & \overline{m+m'} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$,
— $-A = \begin{pmatrix} -m & -n \\ \overline{n} & -\overline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & -n \\ -\overline{-n} & \overline{-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$
— et $AB = \begin{pmatrix} mm'-n\overline{n'} & mn'+n\overline{m'} \\ -\overline{n}m'-\overline{m}\overline{n'} & -\overline{n}n'+\overline{m}\overline{m'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mm'-n\overline{n'} & mn'+n\overline{m'} \\ -\left(\overline{mn'+n\overline{m'}}\right) & \overline{mm'-n\overline{n'}} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$.
— tout $A \in \mathcal{Q}\setminus\{0\}$ admet un inverse en effet si on pose $A = \begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}$ alors $|m|^2+|n|^2 \neq 0$ car $(m,n) \neq (0,0)$ puisque $A \neq 0$ et donc si on prend $\boxed{A' = \frac{1}{|m|^2+|n|^2}\begin{pmatrix} \overline{m} & -n \\ \overline{n} & m \end{pmatrix}}$ on a avec la question a) $AA' = 1_2$ mais aussi ("en appliquant le a) à la matrice A'" ou en disant "de même") $A'A = 1_2$.
— $(\mathcal{Q},\times)$ n'est pas commutatif car $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$ et $AB = \begin{pmatrix} -2+2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2-2i & 0 \\ 0 & -2+2i \end{pmatrix} = BA$.

2)a) $\mathcal{Q}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car $1_2 \in \mathcal{Q}$ mais $i1_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \notin \mathcal{Q}$.

2)b) Pour tout $A \in \mathcal{Q}$ on a :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{Q} &\Leftrightarrow \exists (m,n) \in \mathbb{C}^2, A = \begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A \in \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Il vient que $\mathcal{Q} = \text{vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathcal{Q}$ est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (pour la structure usuelle obtenue par restriction des scalaires) et de plus (e_1, e_2, e_3, e_4) engendre $\mathcal{Q}$ et c'est une base de $\mathcal{Q}$ car de plus (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre puisque pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ si $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $a + ib = c + id = 0$ et donc $a = b = c = d = 0$.

Rem : ainsi $\mathcal{Q}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 4 pour les lois usuelles.

2)c) Après calculs zézés, on présente les choses sous forme d'une table de multiplication :

$\nearrow$	$e_1 (= I_2)$	e_2	e_3	e_4
$e_1 (= I_2)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Exercice 18

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. I désigne la matrice identité et O la matrice nulle. On pose : $G = \left\{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle

$$(*) \quad (M + I)^{2n} - I = O$$

avec M, matrice inconnue, dans G.

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soient $M = M_{a,b}$ un élément de G tel que $b \neq O$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé a M et Id_E, l'application identité de E.

2. Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \ker(u - (a + 2b)\text{Id}_E)$.
3. Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \ker(u - (a - b)\text{Id}_E)$.
4. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ecrire P et P^{-1} en précisant les calculs.
7. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
8. Démontrer que : M est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si D est solution de l'équation $(*)$.
9. Déterminer toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans G.

1. • Soit $M_{a,b}$ dans G. On a alors :

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=K}$$

et ainsi $G \subset \text{vect}_{\mathbb{C}}(I, K)$. De plus l'inclusion réciproque étant évidente, on a

$$\boxed{G = \text{vect}_{\mathbb{C}}(I, K)}$$

Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Enfin (I, K) est clairement une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et comme c'est une partie génératrice de G, c'est une base de G qui est donc de dimension 2.

• On vérifie sans peine que G est stable sous le produit matriciel i.e. que pour $(M, N) \in G^2$ on a $MN \in G$.

2. La matrice dans la base canonique de $u - (a + 2b)\mathrm{Id}_E$ est :

$$A = M - (a + 2b)I = \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix}$$

• Première méthode (pour comprendre des choses).
L'espace vectoriel $\ker(u - (a + 2b)\mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{C}^3$ tels que :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on est donc ramené à résoudre le système $\begin{cases} b(-2x + y + z) = 0 \\ b(x - 2y + z) = 0 \\ b(x + y - 2z) = 0 \end{cases}$ qui est équivalent à (puisque $b \neq 0$) :

$$(S) \begin{cases} -2x + y + z = 0 & (L_1) \\ x - 2y + z = 0 & (L_2) \\ x + y - 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On garde L_1 et on fait $2L_2 + L_1$ et $2L_3 + L_1$ pour obtenir le système équivalent :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

qui se réduit à $x = y = z$. En paramétrant $x = t$, il vient le système équivalent :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

de sorte que $\ker(u - (a + 2b)\mathrm{Id}_E)$ est la droite complexe $\mathbb{C}(1, 1, 1)$ et est donc de dimension 1.

• Deuxième méthode (qui est bien mieux !)
Si on note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on a $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ et (C_1, C_2) est clairement libre donc A est de rang 2 et ainsi $\ker(u - (a + 2b)\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1 via le théorème du rang.

De $C_1+C_2+C_3 = 0$ on tire immédiatement le fait que $(1, 1, 1)$ est dans $\ker(u-(a+2b)\mathrm{Id}_E)$ donc $\boxed{e'_1 = (1, 1, 1)}$ est une base de $\ker(u - (a + 2b)\mathrm{Id}_E)$.

3. La matrice dans la base canonique de $u - (a - b)\mathrm{Id}_E$ est :

$$B = M - (a - b)I = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$$

Cette matrice est clairement de rang 1 donc (selon le théorème du rang) $\ker(u-(a-b)\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 2. Enfin si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de B on a $C_1 = C_2$ et $C_2 = C_3$ donc les vecteurs $\boxed{e'_2 = (1, -1, 0)}$ et $\boxed{e'_3 = (0, 1, -1)}$ sont dans $\ker(u-(a-b)\mathrm{Id}_E)$. Mais la famille (e'_2, e'_3) est clairement libre donc (e'_2, e'_3) est une base de $\ker(u - (a - b)\mathrm{Id}_E)$ puisque ce dernier est de dimension 2.

4. **• Première méthode.** Prenons α, β et γ des complexes tels que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (e'_1, e'_2, e'_3) est donc **libre** dans $\mathbb{C}^3$ qui est de dimension 3 sur $\mathbb{C}$: (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{C}^3$.

• **Deuxième méthode.** On a :

$$\text{vect}_{\mathbb{C}}(e'_1, e'_2, e'_3) = \text{vect}_{\mathbb{C}}(e'_1, e'_2 - e'_1, e'_3) = \text{vect}_{\mathbb{C}}(e'_1, e'_2 - e'_1, e'_3 + \tfrac{1}{2}(e'_2 - e'_1))$$

et les vecteurs e'_1, $e'_2 - e'_1$ et $e'_3 + \frac{1}{2}(e'_2 - e'_1)$ forment une famille échelonnée donc libre. Il en résulte que $\text{vect}_{\mathbb{C}}(e'_1, e'_2, e'_3)$ est de dimension 3 (sur $\mathbb{C}$) donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) engendre $\mathbb{C}^3$: elle est donc libre puisque $\mathbb{C}^3$ est de dimension 3.

5. Comme $e'_1 \in E_1$ on a $u(e'_1) = (a+2b)e'_1$. De même e'_2 et e'_3 appartiennent à E_2 donc : $u(e'_2) = (a-b)e'_2$ et $u(e'_3) = (a-b)e'_3$.

Ainsi on obtient : $\boxed{D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}}$

6. • Rappelons que P est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ (ou encore $P = [\text{Id}_{\mathbb{C}^3}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$). On a donc directement :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

• Puis on inverse P par la méthode du système. On résout le système d'inconnues x, y et z suivant :

$$(S) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On a :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=X \\ x-y+z=Y \\ x-z=Z \end{array} \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ \end{array} \right. \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=X \\ 2x+z=X+Y \\ x-z=Z \end{array} \left\| \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right. \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=X \\ 3x=X+Y+Z \\ -3z=-X-Y+2Z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{3}(X+Y+Z) \\ y=\frac{1}{3}(2X-Y-Z) \\ z=\frac{1}{3}(X+Y-2Z) \end{array} \right.$$

On a donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$.

7. On a $[u]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[\text{Id}_{\mathbb{C}^3}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}_{=P} \underbrace{[u]_{\mathcal{B}'}}_{=D} \underbrace{[\text{Id}_{\mathbb{C}^3}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}_{=P^{-1}}$ donc : $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

8. **IMPORTANT ! Bien comprendre SVP !**
On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} M \text{ est solution de l'équation } (*) &\Leftrightarrow (M+I)^{2n} - I = O \\ &\Leftrightarrow (PDP^{-1} + PP^{-1})^{2n} - I = O \\ &\Leftrightarrow (P(D+I)P^{-1})^{2n} - I = O \\ &\Leftrightarrow P(D+I)^{2n}P^{-1} - I = O \\ &\Leftrightarrow P(D+I)^{2n}P^{-1} - PP^{-1} = O \\ &\Leftrightarrow P[(D+I)^{2n} - I]P^{-1} = O \\ &\Leftrightarrow P^{-1}P[(D+I)^{2n} - I]P^{-1}P = P^{-1}OP \\ &\Leftrightarrow [(D+I)^{2n} - I] = O \\ &\Leftrightarrow D \text{ est solution de l'équation } (*) \end{aligned}$$

9. • La question précédente invite clairement à chercher toutes les solutions de $(*)$ sous la forme

$$D_{a,b} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Prenons donc a et b dans $\mathbb{C}$. On a :

$$(D_{a,b}+I)^{2n} = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} \end{pmatrix}$$

et ainsi il vient :

$$\begin{aligned} D_{a,b} \text{ solution de } (*) &\Leftrightarrow (D_{a,b}+I)^{2n} = I \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a+2b+1)^{2n} = 1 \\ (a-b+1)^{2n} = 1 \\ (a-b+1)^{2n} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\exists (k,\ell) \in \{0,\dots,2n-1\}^2) \begin{cases} a+2b+1 = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} \\ a-b+1 = \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\exists (k,\ell) \in \{0,\dots,2n-1\}^2) \begin{cases} a+2b = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - 1 \\ a-b = \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\exists (k,\ell) \in \{0,\dots,2n-1\}^2) \begin{cases} a = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3\right) \\ b = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

• Pour $M_{a,b}$ dans G, on écrit $M_{a,b} = PD_{a,b}P^{-1}$ avec les notations des questions précédentes et alors, lorsque $\boxed{b \neq 0}$, on a M solution de $(*)$ si et seulement si $D_{a,b}$ est solution de $(*)$. Il en résulte que M est de la forme :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3 & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3 & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3 \end{pmatrix}$$

où $(k,\ell) \in \{0,\dots,2n-1\}^2$ avec $k \neq \ell$.

• Si maintenant $M_{a,b}$ est dans G avec $b = 0$, alors (en procédant de la même manière que ci-dessus), M est solution de $(*)$ si et seulement si $a = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - 1$ où $k \in \{0,\dots,2n-1\}$.

• En combinant les deux points précédents, on peut donc conclure que les solutions de $(*)$ dans G sont exactement les matrices de la forme

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3 & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3 & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} \\ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} & \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} + 2\mathrm{e}^{i\frac{\ell\pi}{n}} - 3 \end{pmatrix}$$

où $(k,\ell) \in \{0,\dots,2n-1\}^2$.

Exercice 19
Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe α, β et γ complexes tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ait une valeur propre double.

Exercice 20
Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1. Démontrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé A. On a $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a) \neq 0$ et on a $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Cette dernière inclusion implique que $\ker f$ est de dimension 2 en utilisant le théorème du rang. Puis $f(a) \in \ker f$, puisque $f^2 = 0$. On complète $f(a)$ en une base $(f(a), b)$ de $\ker f$.
J'affirme alors que la famille $\beta = (f(a), c, a)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons que α, β, γ dans $\mathbb{R}^3$ vérifient :
$$\alpha f(a) + \beta c + \gamma a = 0.$$
En appliquant f, il vient : $\gamma f(a) = 0$. Comme $f(a) \neq 0$, on a $\gamma = 0$ et ainsi :
$$\alpha f(a) + \beta c = 0.$$
Mais la famille $(f(a), c)$ est libre, donc $\alpha = \beta = 0$.
Il en résulte que β est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Mais la matrice de f dans β est exactement la matrice J : celle-ci est donc semblable à A.

2. • L'application $g : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $g(M) = AM + MA$ est linaire : son noyau, qui est $\mathcal{F}$, est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

• Selon la question précédente, A et ^{J} sont semblables : il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.
De plus l'application $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme linéaire. En effet, la linéarité est immédiate (à écrire !) et si $\psi : M \mapsto PMP^{-1}$ l'application $\varphi \circ \psi$ est l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a les équivalences :
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow AM + MA = 0 \\ &\Leftrightarrow PJP^{-1}M + MPJP^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow JP^{-1}MP + P^{-1}MPJ = 0 \\ &\Leftrightarrow J\varphi(M) + \varphi(M)J = 0 \end{aligned}$$
Il en résulte que $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{G} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid NJ + JN = 0\}$. Comme φ est un isomorphisme, $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{G}$.

Prenons alors $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :
$$\begin{aligned} N \in \mathcal{G} &\Leftrightarrow JN + NJ = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (N)_{3,1} & (N)_{3,2} & (N)_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & (N)_{1,1} \\ 0 & 0 & (N)_{1,2} \\ 0 & 0 & (N)_{1,3} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$
On peut donc conclure que $\mathcal{G}$ est l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$\begin{cases} (N)_{3,1} & = 0 \\ (N)_{3,2} & = 0 \\ (N)_{3,3} + (N)_{1,1} & = 0 \\ (N)_{1,2} & = 0 \\ (N)_{1,3} & = 0 \end{cases}.$$
Une matrice de $\mathcal{G}$ est donc décrite par $9 - 5 = 4$ paramètres : $\dim \mathcal{G} = 4$ et $\dim \mathcal{F} = 4$.

Exercice 21
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \mathrm{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.

1. Comme u est de rang 1, $\dim \operatorname{Im} u = 1$.

   • Supposons que $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$. Vie le théorème du rang on a $\dim \operatorname{Im} u + \dim \ker u = n$ donc

   $$E = \operatorname{Im} u \oplus \ker u$$

   On prend alors (e_1) base de $\operatorname{Im} u$ et $\{e_2, \ldots, e_n\}$ base de $\ker u$. La famille :

   $$\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

   est alors une base de E. Puis $u(e_1) \in \operatorname{Im} u = \text{vect}(e_1)$ donc il existe λ réel tel que $u(e_1) = \lambda e_1$ et ainsi :

   $$A = [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   On a alors $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda A.$

   et ainsi $\boxed{u^2 = \lambda u}$

   • Si maintenant $\operatorname{Im} u \cap \ker u$ contient un vecteur non nul e_1 alors ce vecteur engendre $\operatorname{Im} u$ et on a donc $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ de sorte que $u^2 = 0$: il existe bien λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.

   <u>Autre méthode</u>.
   Comme $\operatorname{Im} u$ est de dimension 1, on peut écrire $\operatorname{Im}(u) = \text{vect}(\varepsilon)$ où ε est un vecteur fixé de E. On a alors $u(\varepsilon) \in \operatorname{Im} u$, et ainsi il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $u(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$.
   Prenons maintenant x dans E. Comme $u(x) \in \operatorname{Im} u$ on dispose de α_x réel tel que $u(x) = \alpha_x \varepsilon$. On a alors :

   $$u^2(x) = u(u(x)) = u(\alpha_x \varepsilon) = \alpha_x u(\varepsilon) = \lambda \alpha_x \varepsilon = \lambda u(x)$$

   Ceci étant valable pour tout x dans E on a bien $\boxed{u^2 = \lambda u}$.

2. Posons $\boxed{v = u - \mathrm{Id}_E}$. On cherche un polynôme annulateur de v avec terme constant non nul. On a :

   $$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - 2u + \mathrm{Id}_E = \lambda u - 2u + \mathrm{Id}_E = (\lambda - 2)u - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E + (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \\ &= (\lambda - 2)v + (\lambda - 1)\mathrm{Id}_2 \end{aligned}$$

   donc $v^2 - (\lambda - 2)v - (\lambda - 1)\mathrm{Id}_E = 0$. Il en résulte, puisque $\lambda - 1 \neq 0$ que :

   $$v \circ \left(\frac{1}{\lambda - 1} \left(v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E \right) \right) = \mathrm{Id}_E = \left(\frac{1}{\lambda - 1} \left(v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E \right) \right) \circ v$$

   Comme $\dfrac{1}{\lambda - 1} \left(v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E \right) \in \mathcal{L}(E)$, on peut donc dire que v est inversible avec :

   $$\boxed{v^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1} \left(v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E \right)}.$$