Liste d'exercices types finale

Exercice 1
Énoncé et démonstration du théorème du rang.

Exercice 2
Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$.

Exercice 3
Soient $n \geqslant 1$ entier, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels distincts et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$f(P) = \big(P(\lambda_0), \ldots, P(\lambda_n)\big).$$

1. Démontrer que f est un isomorphisme linéaire.
2. Pour $\mu_0, \ldots, \mu_n$ réels, justifier de l'existence d'un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on ait : $P(\lambda_i) = \mu_i$.
3. Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on pose $L_i = f^{-1}(e_i)$ où $(e_0, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Donner pour tout $(i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2$ la valeur de $L_i(\lambda_j)$ et justifier que $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base β.
5. On note $can = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de passage de β à can.
6. Déterminer, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, le polynôme L_i.

Exercice 4
Indice de nilpotence et dimension. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (on dit que f *est nilpotent d'indice* p).

1. Justifier l'existence de $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$ est libre.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Que dire de la famille $\beta = \big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$?
   Donner la matrice $[f]_\beta$ de f dans β.

Exercice 5 (Lemme de Fitting)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que les suite $\mathrm{Im}\,(u^n)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^n)$ sont monotones et constantes à partir d'un certain rang N (pour l'inclusion).
2. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u^N) \oplus \mathrm{Im}\,(u^N)$.
3. Démontrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^N)$ et $G = \mathrm{Im}\,(u^N)$ sont stables par u. On note $g = u\,|_F^F$ et $h = u\,|_G^G$. Démontrer que g est nilpotent et h inversible.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel.

1. Démontrer qu'une forme linéaire sur E est soit nulle, soit surjective.
2. Démontrer que si E est de dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.

Exercice 7
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on pose $F_k = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_k)$. Démontrer que la matrice de f dans la base β est triangulaire supérieure si et seulement si tous les sous-espaces vectoriels F_k sont f-stables.

Exercice 8
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$ entier, on désigne par Δ_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
2. Déterminer Δ_n en fonction de n.

Exercice 9
Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b \neq c$ dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a_1 - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & a_2 - x & & \vdots \\ \vdots & & & b - x \\ c - x & \cdots & c - x & a_n - x \end{vmatrix}$ est affine.
2. En déduire la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix}$.

Exercice 10
On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt.$$

1. Démontrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.
   De même, $\| \ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b) Démontrer que les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes sur E.
3. Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$ et on rappelle qu'il s'agit d'une norme sur E.
   a) Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. Démontrer que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\, \mathrm{d}t$.
   b) En déduire que pour tout $f \in E$ on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|$.
   c) Les normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ sont-elle équivalentes ?

Exercice 11 (Question de cours)
Soit $f : E \to F$ linéaire où E et F sont des espaces vectoriels normés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue.
(2) f est continue en 0.
(3) f est lipschitzienne.
(4) Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

Exercice 12 (Question de cours)
Soient $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**, $(F, \|\ \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.

Exercice 13
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\ \|_\infty$. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E.

1. a) Montrer que $|\!|\!|\ |\!|\!| : \varphi \mapsto \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
   b) Soit φ dans $\mathcal{L}_c(E)$. Justifier que pour tout f dans E on a : $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant |\!|\!|\varphi|\!|\!|\,\|f\|_\infty$.
   c) Démontrer que pour φ et ψ dans $\mathcal{L}_c(E)$ on a :
$$|\!|\!|\varphi \circ \psi|\!|\!| \leqslant |\!|\!|\varphi|\!|\!|\ |\!|\!|\psi|\!|\!|\,.$$
2. On considère l'application $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}$.
   a) Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
   b) L'application φ est-elle injective ? est-elle surjective ?
   c) Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|\!|\!|\varphi|\!|\!|$.

Exercice 14
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction g est elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 15
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$, continue tel que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. On pose pour $x \geqslant a$ réel : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $R(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Démontrer que la fonction R est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $R' = -f$.

Exercice 16
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

Exercice 17
Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 18
Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 19 (Intégrales de Bertrand)
Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.
3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1,\beta}$.

Exercice 20

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles l'intégrale impropre $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Ajouts de fin décembre

Exercice 21
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B = A^2 + 2I$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. Déterminer les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés. La matrice B est-elle diagonalisable ?
4. Vérifier que si λ est valeur propre de A alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme un polynôme en B.
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice B.
   a. Pour n entier on appelle R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Exprimer R_n en fonction de n.
   b. Déterminer alors B^n pour tout $n \geqslant 0$ entier.

Exercice 22
Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$ entier) dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 23
Diagonaliser la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$ entier) dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 5 et les autres coefficients égaux à 2.

Exercice 24
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Déterminer tous les endomorphismes de E nilpotents et diagonalisables.

Exercice 25
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On suppose que F est un sous-espace f-stable de E. Démontrer que si f est diagonalisable alors l'endomorphisme induit par f sur F est aussi diagonalisable.

Exercice 26
Caractérisation des endomorphismes diagonalisables de rang 1.

Exercice 27 (Commutant : le retour !)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose : $c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid [f,g] = 0\}$.
On suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés.

1. Démontrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f alors pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, il existe μ_i dans $\mathbb{K}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$.
2. En déduire que $c(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.

Exercice 28 (Théorème de diagonalisation simultanée de Schur)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables. On suppose que f et g commutent i.e. que $f \circ g = g \circ f$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f ainsi que $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres associés.
Démontrer que f et g sont simultanément diagonalisable i.e. possèdent une base commune de vecteurs propres.

Exercice 29
Déterminer toutes les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait : $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 30 (La fonction Γ)
Pour $x > 0$, on considère $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'on définit ainsi correctement une fonction $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
2. Démontrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. Démontrer que Γ est C^∞ et préciser $\Gamma^{(k)}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Exercice 31 (L'intégrale de Gauß)

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Dans la suite de cet exercice on se propose de calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
   b) Prouver que pour $x \geqslant 0$ réel on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.
   c) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ réel on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
   d) En déduire la valeur de I.

Exercice 32 (Transformée de Laplace I)
Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues et bornées.

1. Justifier que si $f \in F$ alors pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans F on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in E$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.
2. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\lim\limits_{x\to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Exercice 33 (Transformée de Laplace II)
Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout f dans E on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. Soit la fonction $g_n^{(f)} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour $t \geqslant 0$, par $g_n^{(f)}(t) = t^n f(t)$.
   a) Soit $x > 0$. Démontrer qu'il existe $A_x \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A_x$ on ait $t^n\mathrm{e}^{-tx} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$.
   b) Démontrer que $g_n^{(f)}$ est un élément de E.
2. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit f dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que, pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a :
   $$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$
3. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   Démontrer que pour tout f dans E la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$ où $g_1^{(f)}$ a été définie à la question 1.

Exercice 34
Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f.

1. Démontrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $I = [a, b]$. Démontrer que :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 35
1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 36
1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}.$$
   a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0; +\infty[$.

Exercice 37 (Le théorème barycentrique de Césaro)
Soient (u_n) une suite réelle qui converge vers ℓ. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
Démontrer que $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 38
Etudier la convergence de la série de terme général u_n où $u_n = \pi/2 - \arctan(n \log n)$ $(n \geqslant 2)$.

Exercice 39
Pour $n \geqslant 1$ entier on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En regardant la série $\sum \gamma_{n+1} - \gamma_n$ démontrer que la suite (γ_n) converge.

Exercice 40 (Séries de Bertrand)
Soient $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$ des réels. Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose $u_n^{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Démontrer que la série $\sum u_n^{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
2. Démontrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum u_n^{\alpha,\beta}$ est convergente et que si $\alpha < 1$ la série $\sum u_n^{\alpha,\beta}$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{1/n}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Ajouts de février

Exercice 41
Soient $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur A vers 0.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. La série de fonction $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

Exercice 42
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série de fonctions.
   On note D l'ensemble des x réels où cette série de fonctions converge et pour x dans D, $S(x)$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$.
2. a) Étudier la convergence normale puis uniforme de cette série de fonctions sur D.

b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Une correction utilisant les séries entières

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est 1 par d'Alembert. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ (intervalle ouvert de convergence) et pour tout x réel tel que $|x|>1$, la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ diverge.

   Pour $x=1$, la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge (CSSA) et pour $x=-1$ elle est divergente (série harmonique).

   Conclusion. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $D =]-1,1]$.

2. a) • Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est 1, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.

   • Supposons maintenant que $x \in [0,1]$. La suite $|u_n(x)|$ est décroissante de limite nulle. Ainsi **le critère spécial des séries alternées** s'applique et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$, on a :

   $$|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

   Ainsi $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par sandwich, la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ est est assuré qu'elle y converge uniformément.

   • Supposons un instant que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$.

   Comme pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n(x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$, le théorème de la double limite affirme alors que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ converge, ce qui est profondément stupide !

   Ainsi la série de fonction $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathcal{D} =]-1,1]$.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a,1]$ dès que $a \in [0,1[$.

   b) Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a,1]$ dès que $a \in [0,1[$, la fonction somme S y est continue, puisque chaque u_n l'est. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $a \in\in [0,1[$, S est continue sur $\mathcal{D} =]-1,1]$.

Exercice 43

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

1. a) Prouver que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose pour x réel : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ convergence-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ convergence-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 44 (La fonction ζ)
Pour tout $x>1$ et tout $n\geqslant 1$ entier on pose $u_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$.

1. Justifier que la fonction $\zeta : x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}$ est correctement définie sur $]1,+\infty[$.
2. Soit $a>1$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
3. Étudier la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?
5. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et exprimer ses dérivées k-ièmes à l'aide de séries.

Exercice 45
Pour $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|\neq 1$, calculer : $I=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it}-z}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 46
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 47
Pour $z\in\mathbb{C}$ on pose correctement $\exp(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$. Démontrer que $\exp(z+z')=\exp(z)\exp(z')$.

Exercice 48
Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$ démontrer que : $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$.

Exercice 49
Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes.

1. $f : x\mapsto \ln(1+x+x^2)$
2. $g : x\mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$.

Exercice 50
La fonction arcsin est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 51
Trouver par deux méthodes la solution de l'équation différentielle $(E)\quad y'=x^2+y$ telle que $f(0)=0$

Exercice 52
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ et trouver sa fonction somme.

Exercice 53
Rayon de convergence et fonction somme de la série entière de la variable réelle $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

Exercice 54
On considère une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. **Égalités de Cauchy**. Pour tout $r \in [0, R[$, on considère la fonction $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie, pour θ réel, par $f_r(\theta) = f(r\mathrm{e}^{i\theta})$.
   On définit les coefficients de Fourier de f_r, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f_r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_r(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
   Démontrer que $c_n(f_r) = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. Dans cette question $R = +\infty$. Démontrer que si f est bornée alors elle est constante (théorème de Liouville).

Exercice 55
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.
Démontrer à l'aide des fonctions génératrices que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 56 (Autour de Borel-Cantelli)
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
2. On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!). Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...
   a. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ une famille de ℓ événements indépendants. Montrer que l'on a
   $$P\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant \ell} \overline{E_i}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell} P(E_i)}.$$
   où $\overline{E}$ est l'événement contraire de l'événement E.
   b. On note A_k l'événement « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ». Que vaut la probabilité de A_k ?
   c. Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage, où n est un entier positif fixé ?
   d. Quelle est la probabilité que la boule numérotée 10 sorte une infinité de fois ?
3. On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2, le $n^{\text{ème}}$ jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées $2, 3, 4$ le deuxième jour, cinq boules le troisième, ...). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.
   Quelle est la probabilité que le nombre 10 sorte une infinité de fois ?

Exercice 57
Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de lois géométriques respectives de paramètres p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.
Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 58
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $\sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 59 (Inégalité de Markov)

1. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire qui admet une espérance alors, pour tout $a > 0$, on a :

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}.$$

2. Soit S une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Démontrer que pour tout $x > 0$ tel que l'espérance $E(\mathrm{e}^{xS})$ existe et tout a réel, on a : $P(S \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-ax} E(\mathrm{e}^{xS})$.

Exercice 60 (Loi faible des grands nombres)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires **indépendantes** de **même espérance** m et de **même variance** σ^2. On pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$: $P(\left|\overline{X}_n - m\right| > \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 61 (Lois binomiales négatives)

On effectue des lancers d'une pièce donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant face avec la probabilité $q = 1 - p$, les différents lancers étant supposés indépendants. Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au $k^{\text{ème}}$ lancer », on note également S_k le rang du $k^{\text{ème}}$ pile. On suppose que S_k est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 prend la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, S_3 prend la valeur 6, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

1. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.
2. Soit k un entier naturel ≥ 2. Pour tout entier naturel $n \geq k$, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n - 1$ premiers lancers.
   a) Donner la loi de X_{n-1}.
   b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.
   c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

   $$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

   On dit que S_k suit la loi *binomiale négative* de paramètres k et p.
3. Soit k un entier ≥ 2. On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier $i \geq 2$, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
   a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.
   b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.
   c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.
   d) Déterminer $\operatorname{cov}(S_i, S_j)$ pour i et j dans $\mathbb{N}^*$.
4. Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Montrer alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ est d'espérance finie et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k - 1}\right) = p$.

Ajouts de fin mars

Exercice 62
On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application de E^2 dans E définie par : $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i q_i$ où on a écrit : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$...

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{P \in E | P(1) = 0\}$. Déterminer $\operatorname{dist}(1, F)$.

Exercice 63 (Matrices de Gram)
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\theta = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille dans E. On considère la matrice $G_\theta = [\langle a_i, a_j \rangle] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que G_θ est inversible si et seulement si θ est une famille libre.
2. On suppose que la famille θ est libre et on pose $F = \operatorname{vect}(\theta)$. Soit $x \in E$. On note θ' la famille $(a_1, \ldots, a_n, x)$. Démontrer que :
$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G_{\theta'}}{\det G_\theta}}.$$

Exercice 64
Pour $n \geqslant 1$ entier et $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, continue, déterminer
$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (f(t) - (a\ \cos nt + b\ \sin nt))^2\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 65
On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application de E^2 dans E définie par : $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} p_i q_i$ où on a écrit : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$...

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{P \in E | P(1) = 0\}$. Déterminer $\operatorname{dist}(1, F)$.

Exercice 66
Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à
$$F = \{(x_1, \ldots, x_,) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Exercice 67
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre de f.
Démontrer que pour tout $x \in E$ on a : $\lambda \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \mu \|x\|^2$.

Exercice 68
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours.** Démontrer que :
   a) $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
   b) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. On suppose que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
3. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer que $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

Exercice 69
Soit A non nulle dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer que la diagonale de A contient un coefficient strictement positif.

Exercice 70
Soient E et F des espaces vectoriels normés.

1. Soit $a \in A$ partie de E et $f : A \to F$. Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la continuité en a pour l'application f
2. On suppose dans cette question que $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont deux applications continues qui coïncident sur une partie dense A de E. Démontrer que $f = g$.

Exercice 71 (Propriétés topologiques de $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$)

1. Démontrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe dont l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 72 (Matrices stochastiques)
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ si $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à* 1.

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; & (1) \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. & (2) \end{cases}$$

1. Vérifier que la condition (2) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
3. Démontrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 73
Soit $n \geqslant 2$ entier. Démontrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 74
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que $\|\ \|$ est 1-lipschitzienne.
2. Soit A une partie non vide de E. Pour $x \in E$ on pose $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   a) Justifier que l'on définit correctement une application $d_A : E \to \mathbb{R}^+$ en posant, pour x dans E :
   $$d_A(x) = \mathrm{dist}(x, A).$$
   b) Démontrer que d_A est 1-lipschitzienne.

Exercice 75
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tell que $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t dans I.

1. On pose pour $t \in I$: $f(t) = \dfrac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$. Démontrer que pour tout t dans I, $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$.
2. Déterminer les arcs paramétrées $c : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ne passant pas par l'origine, tels que pour tout $t \in I$ la famille $(c(t), c'(t))$ soit liée.

Exercice 76
Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{3-x} + \mathrm{e}^{3-y}$.

Exercice 77
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2 - tx + 2y)^2 \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$. Étudier les extrema de f.

Exercice 78
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

1. Étudier les extrema locaux de la fonction f.
2. Démontrer que si $|x| + |y| \geqslant 4$ alors $f(x,y) \geqslant 0$.
3. Déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 79
Soient $n \geqslant 1$ entier, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et α réel. On dit que f est *positivement homogène de degré* α $(ph - \alpha)$ lorsque pour tout $t > 0$ réel et m dans $\mathbb{R}^n$ on a : $f(tm) = t^\alpha f(m)$.

1. Donner des exemples de cette notion.
2. On suppose que f est de classe C^1. Démontrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler :
$$\langle \nabla f(m), m \rangle = \alpha f(m) \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{R}^n.$$
3. On suppose que $n = 2$ et que f est C^2. On définit g dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en posant pour $m = (x,y)$:
$$g(m) = x\frac{\partial f}{\partial x}(m) + y\frac{\partial f}{\partial y}(m).$$
   a. Démontrer que si $\Delta f = 0$ alors $\Delta g = 0$.
   b. Y-a-t-il réciproque ?

Exercice 80

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $F(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$x\partial_1 F(x,y) + y\partial_2 F(x,y) = 0.$$
Démontrer que $F = 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.
   a. Calculer les dérivées partielles $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   b. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :
$$(\spadesuit) \quad g(0,0) = 0 \ \text{ et pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x\partial_1 g(x,y) + y\partial_2 g(x,y) = f(x,y)$$