Liste d'exercices à savoir faire pour les colles des semaines 13 et 14.

Exercice 1
Énoncé et démonstration du théorème du rang.

Exercice 2
Soient A la matrice pleine de 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geqslant 2$) et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

Exercice 3
Soient $n \geqslant 1$ entier, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels distincts et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$f(P) = \big(P(\lambda_0), \ldots, P(\lambda_n)\big).$$

1. Démontrer que f est un isomorphisme linéaire.
2. Pour $\mu_0, \ldots, \mu_n$ réels, justifier de l'existence d'un unique polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on ait : $P(\lambda_i) = \mu_i$.
3. Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on pose $L_i = f^{-1}(e_i)$ où $(e_0, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Donner pour tout $(i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2$ la valeur de $L_i(\lambda_j)$ et justifier que $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base β.
5. On note $can = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de passage de β à can.
6. Déterminer, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, le polynôme L_i.

Exercice 4
Indice de nilpotence et dimension. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (on dit que f *est nilpotent d'indice* p).

1. Justifier l'existence de $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$ est libre.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Que dire de la famille $\beta = \big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$?
   Donner la matrice $[f]_\beta$ de f dans β.

Exercice 5 (Lemme de Fitting)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que les suite $\operatorname{Im}(u^n)$ et $\operatorname{Ker}(u^n)$ sont monotones et constantes à partir d'un certain rang N (pour l'inclusion).
2. Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(u^N) \oplus \operatorname{Im}(u^N)$.
3. Démontrer que $F = \operatorname{Ker}(u^N)$ et $G = \operatorname{Im}(u^N)$ sont stables par u. On note $g = u\,|_F^F$ et $h = u\,|_G^G$. Démontrer que g est nilpotent et h inversible.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel.

1. Démontrer qu'une forme linéaire sur E est soit nulle, soit surjective.
2. Démontrer que si E est de dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles.

Exercice 7
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on pose $F_k = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Démontrer que la matrice de f dans la base β est triangulaire supérieure si et seulement si tous les sous-espaces vectoriels F_k sont f-stables.

Exercice 8
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$ entier, on désigne par Δ_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
2. Déterminer Δ_n en fonction de n.

Exercice 9
Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b \neq c$ dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{vmatrix} a_1 - x & b - x & \cdots & b - x \\ c - x & a_2 - x & & \vdots \\ \vdots & & & b - x \\ c - x & \cdots & c - x & a_n - x \end{vmatrix}$ est affine.
2. En déduire la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix}$.

Exercice 10
On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt.$$

1. Démontrer que $\| \ \|$ définit une norme sur E.
   De même, $\| \ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b) Démontrer que les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont équivalentes sur E.
3. Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$ et on rappelle qu'il s'agit d'une norme sur E.
   a) Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. Démontrer que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\, \mathrm{d}t$.
   b) En déduire que pour tout $f \in E$ on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|$.
   c) Les normes $\| \ \|$ et $\| \ \|_1$ sont-elle équivalentes ?

Exercice 11 (Question de cours)
Soit $f : E \to F$ linéaire où E et F sont des espaces vectoriels normés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue.
(2) f est continue en 0.
(3) f est lipschitzienne.
(4) Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x dans E, $\|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

Exercice 12 (Question de cours)
Soient $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**, $(F, \|\ \|_F)$ un espace vectoriel normé, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est continue.

Exercice 13
Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\ \|_\infty$. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E.

1. a) Montrer que $\|\!|\ \|\!| : \varphi \mapsto \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
   b) Soit φ dans $\mathcal{L}_c(E)$. Justifier que pour tout f dans E on a : $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|\!|\varphi\|\!|\,\|f\|_\infty$.
   c) Démontrer que pour φ et ψ dans $\mathcal{L}_c(E)$ on a :
$$\|\!|\varphi \circ \psi\|\!| \leqslant \|\!|\varphi\|\!|\ \|\!|\psi\|\!|\,.$$
2. On considère l'application $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}$.
   a) Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
   b) L'application φ est-elle injective ? est-elle surjective ?
   c) Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $\|\!|\varphi\|\!|$.

Exercice 14
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction g est elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 15
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$, continue tel que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge. On pose pour $x \geqslant a$ réel : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $R(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Démontrer que la fonction R est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $R' = -f$.

Exercice 16
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

Exercice 17
Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 18
Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 19 (Intégrales de Bertrand)
Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.
3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1,\beta}$.

Exercice 20
1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles l'intégrale impropre $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Ajouts de fin décembre

Exercice 21
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B = A^2 + 2I$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. Déterminer les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés. La matrice B est-elle diagonalisable ?
4. Vérifier que si λ est valeur propre de A alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme un polynôme en B.
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice B.
   a. Pour n entier on appelle R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Exprimer R_n en fonction de n.
   b. Déterminer alors B^n pour tout $n \geqslant 0$ entier.

Exercice 22
Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$ entier) dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 23
Diagonaliser la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 1$ entier) dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 5 et les autres coefficients égaux à 2.

Exercice 24
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Déterminer tous les endomorphismes de E nilpotents et diagonalisables.

Exercice 25
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On suppose que F est un sous-espace f-stable de E. Démontrer que si f est diagonalisable alors l'endomorphisme induit par f sur F est aussi diagonalisable.

Exercice 26
Caractérisation des endomorphismes diagonalisables de rang 1.

Exercice 27 (Commutant : le retour !)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose : $c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid [f, g] = 0\}$.
On suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés.

1. Démontrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f alors pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, il existe μ_i dans $\mathbb{K}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$.
2. En déduire que $c(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.

Exercice 28 (Théorème de diagonalisation simultanée de Schur)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables. On suppose que f et g commutent i.e. que $f \circ g = g \circ f$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f ainsi que $E_1, \ldots, E_p$ les espaces propres associés.
Démontrer que f et g sont simultanément diagonalisable i.e. possèdent une base commune de vecteurs propres.

Exercice 29
Déterminer toutes les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on ait : $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 30 (La fonction Γ)
Pour $x > 0$, on considère $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'on définit ainsi correctement une fonction $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
2. Démontrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. Démontrer que Γ est C^∞ et préciser $\Gamma^{(k)}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Exercice 31 (L'intégrale de Gauß)

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Dans la suite de cet exercice on se propose de calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.
2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$
   a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
   b) Prouver que pour $x \geqslant 0$ réel on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x \,\mathrm{e}^{-x^2 t^2} \,\mathrm{d}t$.
   En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.
   c) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ réel on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
   d) En déduire la valeur de I.

Exercice 32 (Transformée de Laplace I)
Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues et bornées.

1. Justifier que si $f \in F$ alors pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans F on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in E$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.
2. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel. Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\lim\limits_{x\to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Exercice 33 (Transformée de Laplace II)
Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout f dans E on appelle transformée de Laplace de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. Soit la fonction $g_n^{(f)} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour $t \geqslant 0$, par $g_n^{(f)}(t) = t^n f(t)$.
   a) Soit $x > 0$. Démontrer qu'il existe $A_x \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A_x$ on ait $t^n\mathrm{e}^{-tx} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$.
   b) Démontrer que $g_n^{(f)}$ est un élément de E.
2. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit f dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que, pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a :
   $$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$
3. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   Démontrer que pour tout f dans E la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$ où $g_1^{(f)}$ a été définie à la question 1.

Exercice 34
Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f.

1. Démontrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $I = [a, b]$. Démontrer que :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 35

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 36

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$

   a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0;+\infty[$.

Exercice 37 (Le théorème barycentrique de Césaro)
Soient (u_n) une suite réelle qui converge vers ℓ. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.
Démontrer que $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 38
Etudier la convergence de la série de terme général u_n où $u_n = \pi/2 - \arctan(n\log n)$ $(n \geqslant 2)$.

Exercice 39
Pour $n \geqslant 1$ entier on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$ où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En regardant la série $\sum \gamma_{n+1} - \gamma_n$ démontrer que la suite (γ_n) converge.

Exercice 40 (Séries de Bertrand)
Soient $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$ des réels. Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose $u_n^{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Démontrer que la série $\sum u_n^{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
2. Démontrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum u_n^{\alpha,\beta}$ est convergente et que si $\alpha < 1$ la série $\sum u_n^{\alpha,\beta}$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{1/n}}{(\ln(n^2+n))^2}$.