
Exercices sur les suites

1 Exercices « de base »**Exercice 1**

On s'embrouille dans la définition de la convergence ? Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Traduire sur (u_n) chacun des énoncés qui suivent, tous obtenus par « mélanges » à partir de la définition de $u_n \rightarrow \ell$:

1. $\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
2. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
4. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \leq n, |u_N - \ell| \leq \varepsilon$.
5. $\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \leq n, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exercice 2

Pour tout entier $n > 0$ on note u_n le chiffre des unités de 7^{n^2} . Trouver :

$$a = 0, u_1 u_2 u_3 \dots$$

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1 - \sin \frac{x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et que cette solution est dans $[0; 1]$; on note x_n cette solution.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que (x_n) est monotone.

Exercice 5

On considère les suites u , v et w définies pour $n \geq 1$ entier par :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{nn!} \\ w_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

1. Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. On appellera ℓ leur limite commune.

2. A l'aide de la formule de Taylor-intégrale appliquée à l'exponentielle, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{n!(n+1)} \leq e - u_n \leq \frac{e}{n!(n+1)}.$$

3. Démontrer que la suite (w_n) croît strictement vers e .

Exercice 6

Soit $a > 0$.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que l'on définit correctement une suite (u_n) en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.
2. Etudier la suite (u_n) .

Exercice 7 (Moyenne arithmético-géométrique)

Soient a et b des réels tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a, v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array} \right\} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1. Montrer que ces relations définissent bien les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et qu'elles ont même limite.
3. Que se passe-t-il lorsque $b = 0$? lorsque $a = b$?

Exercice 8 (Approximation décimale d'un réel)

On rappelle qu'un nombre décimal est un réel de la forme $\alpha 10^{-n}$ où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre décimal $u_n(x) = \mathbf{E}(10^n x) \cdot 10^{-n}$ **est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**. La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est appelée **la suite des approximations décimales par défaut de x** .
 - a. Donner les 5 premiers termes de l'approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$, de $\frac{2}{3}$, de $-\frac{2}{3}$. Que dire de la suite des approximations décimales par défaut d'un nombre entier relatif? D'un nombre décimal?
 - b. Montrer que $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leq x < u_n(x) + 10^{-n}$.
 - d. En déduire que $u_n(x) \xrightarrow{+\infty} x$.
2. On définit, de même : pour tout $n \in \mathbb{N}$, **l'approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près** : c'est le nombre décimal $v_n(x) = u_n(x) + 10^{-n}$; **la suite des approximations décimales par excès de x** : c'est la suite $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer que les suites $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2 Exercices « plus sophistiqués »

Exercice 9

1. Le théorème barycentrique de CÉSARO. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite **complexe** telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. On pose pour tout $n \geq 1$ entier :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

- a. Dans cette question, on suppose que $\ell = 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
- b. Démontrer alors que si $\ell \neq 0$ on a autant $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.
2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que : $x_n \underset{+\infty}{\sim} \ell n$.
3. « D'ALEMBERT implique CAUCHY ». Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $x_n > 0$. On suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell > 0.$$

Démontrer que $\sqrt[n]{x_n} \xrightarrow{+\infty} \ell$.

4. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.
- a. Justifier que (x_n) est correctement définie.
- b. Etudier la suite (x_n) .
- c. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$ et 3 .
En déduire un équivalent de (u_n) .
5. Soit $p \geq 1$ entier. Pour tout $n \geq 1$ entier on pose : $s_n = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{(n!)^{\frac{p}{n}}}$.
- a. Soit a un réel. Démontrer que la suite $x_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ converge vers e^a .
- b. Déterminer un équivalent de s_n en $+\infty$. En déduire que $s_n \xrightarrow{+\infty} e^p$.

Exercice 10

Soit (a_n) une suite réelle tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sum_{k=0}^n a_k^2 = 1$. Etudier le comportement de la suite (a_n) à l'infini. Donner un équivalent de cette suite à l'infini.

Exercice 11

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$. Démontrer qu'il existe une extraction φ telle que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge.

Exercice 12

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente et soit u_n une suite bornée de réels positifs. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k v_k$. Montrer que u_n stationne à 0.

Exercice 13

Soit u_n une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0.$$