Vrai/Faux sur les suites, une correction

Exercice 1

1. FAUX : prendre $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
2. FAUX : prendre $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$.
3. FAUX : prendre $u_n = (-1)^n$. On a cependant l'équivalence, pour une suite complexe u :
$$u \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |u_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. FAUX. Prendre la suite u définie de la manière suivante :
$$\begin{cases} u_{2n} = 2n \\ u_{2n+1} = (2n+1)^2 \end{cases}$$
5. FAUX : prendre la suite $u_n \dfrac{(-1)^n}{n}$. La suite $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ n'admet pas de limite.
6. FAUX. Prendre par exemple $u_n = \sqrt{n}$. Pour tout $n \geqslant 0$ entier on a :
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
7. VRAI.
8. FAUX. Prendre $\varepsilon = 0$: la suite est constante de valeur ℓ à partir d'un certain rang. □

Exercice 2

1. FAUX : prendre $u_n = \dfrac{1}{n} = -v_n$.
2. FAUX : prendre $u_n = (-1)^n$.
3. VRAI : une suite convergente est bornée.
4. FAUX : prendre $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
5. FAUX : prendre $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
6. VRAI : une suite périodique croissante est constante.
En effet, soit u une suite périodique croissante et M une période de u. Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit p entier tel que $pM \geqslant n$. On a alors :
$$\begin{cases} u_0 = u_{pM} \\ u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{pM} \end{cases}$$
7. VRAI. Soit u une suite périodique convergente et M une période de u. On note ℓ la limite de u. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe p et q entiers tels que $u_p \neq u_q$. On pose $\varepsilon = \dfrac{|u_p - u_q|}{4}$.
Comme $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :
$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
Soient maintenant p_1 et q_1 entiers naturels tels que $p + p_1M \geqslant N$ et $q + q_1M \geqslant N$. Par périodicité de u on a :
$$4\varepsilon = |u_p - u_q| = |u_{p+p_1M} - u_{q+q_1M}| \underbrace{\leqslant}_{IT} |u_{p+p_1M} - \ell| + |\ell - u_{q+q_1M}| \leqslant 2\varepsilon.$$
On obtient donc une contradiction. □

Exercice 3

1. VRAI. Si u est une suite convergente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = n + (u_n - n).$$

2. FAUX. Prendre $u_n = (-1)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

   Cependant on a le résultat suivant : si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent alors la série de terme général v_n converge.
   En effet, on a alors pour tout n entier $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$. Or la série de terme général $w_n - u_n$ converge : par domination, la série de terme général $v_n - u_n$ converge. Par somme de série convergente, la série $\sum v_n$ converge.

3. FAUX. Prendre $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$.
   Notons que si $\begin{cases} u_n v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ u_n + v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ alors $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n^2 + v_n^2 = (u_n + v_n)^2 - 2u_n v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Par sandwich, il vient $u_n^2 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. FAUX. Prendre $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$.

5. FAUX. Prendre classiquement $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. On a :

$$\log u_n = n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 1.$$

   Par continuité de l'exponentielle, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$. $\square$