Feuille d'exercices sur l'intégration de première année.
Quelques corrections

Exercice 4 (Inégalité de Kantorovitch)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement positive, continue, de minimum m et de maximum M. Démontrer que :

$$1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \ \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

• L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right).$$

ce qui prouve la première partie de l'inégalité.

• Sur $[0,1]$, on a $(M-f)(f-m) \geqslant 0$ donc $-f^2 + (m+M)f - mM \geqslant 0$, d'où $\dfrac{mM}{f} - (m+M) + f \leqslant 0$.
Ainsi, en intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{mM}{f} - (m+M) + \int_0^1 f \leqslant 0.$$

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f}$. Il vient, en multipliant par I qui est positif :

$$mMI^2 - (m+M)I + \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f} \leqslant 0.$$

Le trinôme du second degré $mMX^2 - (m+M)X + \displaystyle\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}$, de coefficient dominant strictement positif, admet donc au moins une racine. Cela force

$$\Delta = (m+M)^2 - 4mM \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f} \geqslant 0.$$

La seconde partie de l'inégalité est donc démontrée. $\square$

Exercice 5
Pour $a < b$ réels on pose : $E_{a,b} = \left\{ f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f(0) = a \ \text{ et } \ f(1) = b \right\}$. On pose encore pour f dans $E_{a,b}$:

$$I(f) = \int_0^1 [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

On a donc une fonction $I : E_{a,b} \to \mathbb{R}$. Démontrer que I admet un minimum et le déterminer.

$$\boxed{\textbf{IMPORTANT}}$$

Pour tout f dans $E_{ab,}$ (puisque f est C^1) on a :

$$b - a = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Il vient donc : $(b-a)^2 = \left[\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \underbrace{\leqslant}_{CSB} \left(\int_0^1 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right) = I(f)$.

• Ainsi I est minorée par $(b-a)^2$ sur $E_{a,b}$. Soit maintenant f la fonction affine telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. On a $f'(x) = b - a$ (sans aucun calcul !) de sorte que :

$$I(f) = (b-a)^2$$

Conclusion. Le minimum de I sur $E_{a,b}$ est donc $(b-a)^2$. □

Exercice 6 (Théorème des deux zéros)
Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = 0$.
Démontrer que f admet au moins deux zéros sur $]0,\pi[$.

Dans le cas contraire on aurait par exemple $f > 0$ et $f \geqslant m > 0$ sur $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon > 0$ petit. De là :

$$0 = \int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx \geqslant \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \underbrace{f(x)\sin(x)}_{>0}\,dx$$

ce qui est absurde.

• Il vient alors deux types de possibilités.

Soit f s'annule en a et reste de signe constant (par exemple $f \geqslant 0$). On a alors $f(x) > 0$ si $x \neq a$ ce qui est impossible puisque :

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,dx = 0.$$

L'autre type de possibilité est la suivante : f s'annule en a et change de signes. Par exemple on peut supposer $f > 0$ avant a. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin(a-x)\,dx &= \sin a \underbrace{\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx}_{=0} - \cos a \underbrace{\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Mais $x \mapsto f(x)\sin(a-x)$ est positive sur $[a,b]$ et non identiquement nul d'où une contradiction. □

Exercice 8
Soient n entier naturel et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout k dans $\{0,\ldots,n\}$.
Démontrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $]0,1[$.

Indication : *on pourra procéder par récurrence.*

On considère pour n entier la propriété :
$\mathcal{P}_n$: « *si* $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *est telle que* $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *pour tout* $k \in \{0,\ldots,n\}$ *alors* f *a au moins* $n+1$ *zéros sur* $]0,1[$ ».
Si une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, ne s'annule pas sur $]0,1[$ alors $\displaystyle\int_0^1 f > 0$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. On montre alors que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n.
Fixons $n \geqslant 1$ entier et supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $(\forall k \in \{0,\ldots,n\}) \left(\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right)$.
Pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ on a donc : $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On considère $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette application est de classe C^1 sur $[0,1]$ et on a $F' = f$. Puis $F(0) = 0 = F(1)$. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$ on a alors :

$$\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{IPP} \left[t^k F(t)\right]_0^1 - \int_0^1 k t^{k-1} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on a $\int_0^1 t^k F(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On applique alors $\mathcal{P}_{n-1}$ à la fonction F : elle admet au moins n zéros sur $]0,1[$. Comme $F(0) = F(1) = 0$, la fonction F admet $n+2$ zéros sur $[0,1]$. Le théorème de Rolle assure alors que $f = F'$ admet $n+1$ zéros sur $]0,1[$. $\square$

Commentaire. L'exercice et bien plus fin qu'il n'y parait : on doit ajuster la propriété à montrer par récurrence lors de la rédaction au brouillon.

Exercice 9 (Le premier théorème de la moyenne)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ $C^0 - PM$. Alors il existe c dans $[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

• Remarquons tout d'abord que si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors g étant positive, elle est nulle sauf en un nombre fini de points et il en va donc de même du produit fg de sorte que le résultat demandé est alors trivial (prendre n'importe quelle valeur pour c).

On suppose donc dans la suite que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ i.e. $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t > 0$ puisque $g \geqslant 0$.

• Puis, f étant continue, l'image de $[a,b]$ est un segment $[m,M]$ et pour démontrer la première formule de la moyenne, il suffit de montrer que :

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \in [m,M]$$

Or pour tout t dans $[a,b]$ on a $m \leqslant f(t) \leqslant M$ et ainsi (puisque $g \geqslant 0$) :

$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

Il vient donc par croissance de l'intégrale : $m\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui achève l'exercice. $\square$

Exercice 10 (Transformée de Hardy)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue et :

$$H_f = \begin{pmatrix}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que H_f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique alors H_f admet une limite en $+\infty$.

1. Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par continuité de f, F est de classe C^1 avec $F' = f$. Puis, si $x > 0$, on a :

$$H_f(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} F'(0) = f(0).$$

On peut donc prolonger H_f par continuité en 0 en posant $H_f(0) = f(0)$.

2. Pour le lecteur. $\square$

Exercice 11 (Inégalités de Steffensen)
Soient f et g dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que f est décroissante et $0 \leqslant g \leqslant 1$. On pose :

$$\lambda = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose pour x dans $[a,b]$: $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout x dans $[0,a]$ on a $0 \leqslant G(x) \leqslant x-a$. On peut alors poser correctement pour x dans $[a,b]$:
$$\psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Démontrer que φ et ψ sont dérivables, déterminer ψ' et montrer que $\varphi' \leqslant \psi'$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_{b-\lambda}^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

1. Notons que $G(b) = \lambda$. Comme $0 \leqslant g \leqslant 1$ on a par croissance de l'intégrale :
$$\boxed{0 \leqslant G(x) \leqslant x-a \text{ pour } x \text{ dans } [a,b]}$$
2. • Comme g est continue, le théorème fondamental assure que G est C^1 avec $G' = g$. Puis $t \mapsto f(t)g(t)$ est continue sur $[a,b]$ donc le théorème fondamental assure encore que φ est C^1 sur $[a,b]$ avec :
$$\boxed{\varphi'(x) = f(x)g(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } [a,b]}$$
Si maintenant $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ on a encore f de classe C^1 avec $F' = f$. Or pour tout x dans $[a,b]$ on a :
$$\psi(x) = F(a+G(x))$$
donc ψ est de classe C^1 par composition et on a $\psi'(x) = F'(a+G(x)) \times G'(x)$ pour tout x dans $[a,b]$ donc :
$$\boxed{\psi'(x) = f(a+G(x))g(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } [a,b]}$$
• D'après la question on a pour tout x dans $[a,b]$: $a+G(x) \leqslant x$. Fixons x dans $[a,b]$. Par décroissance de f on obtient donc :
$$f(a+G(x)) \geqslant f(x)$$
donc en multipliant chacun des membres par $g(x)$ (qui est positif) on obtient :
$$\boxed{\varphi'(x) \leqslant \psi'(x)}$$
3. On intégre la relation précédente :
$$\int_a^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \psi'(x)\,\mathrm{d}x$$
et ainsi il vient $\boxed{\varphi(b) \leqslant \psi(b)}$ ce qui est exactement l'inégalité souhaitée.
4. On adapte les questions précédentes...

Exercice 12
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, continue. On suppose qu'il existe a réel tel que pour tout x dans $[0,1]$ on ait : $f(x) \leqslant a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Que dire de f ?

IMPORTANT

On considère la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue, le théorème fondamental assure que φ est de classe C^1 et pour $x \in [0,1]$ on a :

$$\varphi'(x) = \left(-a\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\right)\mathrm{e}^{-ax} \leqslant 0$$

Ainsi $\varphi(x)$ est décroissante : pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(0) = 0$$

Mais comme f est positive sur $[0,1]$, on a $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout x dans $[0,1]$ et ainsi $\varphi(x) = 0$ pour tout x dans $[0,1]$ donc $\varphi'(x) = 0$ i.e. $f(x) = 0$ pour tout x dans $[0,1]$.

Conclusion. f est la fonction nulle.

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x réel et tout $a > 0$ on ait :

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On procède par *analyse/synthèse*.

• **Analyse**. Si f convient, on considère naturellement la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ le théorème fondamental affirme que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$. Puis pour tout x et $a > 0$ réels on a :

$$f(x) = \frac{1}{2a}\left[F(x+a) - F(x-a)\right] \quad (*)$$

Ainsi f est somme de deux fonction C^1 : elle est C^1 et par ZIG-ZAG f est C^∞ (*L'idée de départ est de gagner en régularité pour f...L'objectif est pleinement atteint.*)
Puis on a pour tout x réel et $a > 0$: $2af(x) = F(x+a) - F(x-a)$. On fixe x et on dérive à bon droit cette dernière égalité deux fois par rapport à a. On obtient successivement :

$$2f(x) = f(x+a) + f(x-a) \quad \text{et} \quad 0 = f'(x+a) - f'(x-a)$$

cette dernière égalité étant valable pour tout x réel et $a > 0$. Si donc $X \in \mathbb{R}$ avec $X > 0$ on a en prenant $x = a = \frac{X}{2} > 0$:

$$f'(X) = f'(\tfrac{X}{2} + \tfrac{X}{2}) = f'(0)$$

donc f' est constante sur $[0, +\infty[$ de valeurs $f'(0)$. De même, si $X < 0$ en prenant $-x = a = -\dfrac{X}{2}$ on obtient :

$$f'(X) = f'(x-a) = f'(x+a) = f'(0)$$

et ainsi $f'(x) = f'(0)$ pour tout x réel : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est affine}}$.

• **Synthèse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine. On écrit $f(x) = \alpha x + \beta$ pour tout x réel. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{x-a}^{x+a} \alpha t + \beta\,\mathrm{d}t \\
&= \left\{\alpha\frac{t^2}{2} + \beta t\right]_{x-a}^{x+a} \\
&= \alpha\frac{(x+a)^2}{2} - \alpha\frac{(x-a)^2}{2} + \beta(x+a) - \beta(x-a) \\
&= 2a(\alpha x + \beta) = 2af(x)
\end{aligned}$$

Conclusion. fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x réel et tout $a > 0$ on ait $f(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,dt$ sont exactement $\boxed{\text{les fonctions affines}}$.

Exercice 15
Soit f dans $C^2([-1,1],\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe α dans $[-1,1]$ tel que : $f''(\alpha) = 3\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - 6f(0)$.

On considère la fonction $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme f est continue, le théorème fondamental affirme que F est C^1 et $F' = f$. Mieux, comme f est C^2, la fonction F est C^3. Puis selon TAYLOR-LAGRANGE il existe $a \in]0,1[$ et $b \in]-1,1[$ tels que :

$$\begin{cases} F(1) = F(0) + F'(0) + \dfrac{F''(0)}{2} + \dfrac{1}{6}F^{(3)}(a) \\ F(-1) = F(0) - F'(0) + \dfrac{F''(0)}{2} - \dfrac{1}{6}F^{(3)}(b) \end{cases}$$

Par différence il vient, sachant que $F(0) = 0$:

$$F(1) - F(-1) = 2F'(0) + \frac{1}{6}(F^{(3)}(a) + F^{(3)}(b))$$

Ainsi on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2f(0) + \frac{1}{6}(f''(a) + f''(b))$.
Enfin f étant C^2, f'' est continue et par valeurs intermédiaires, il existe α entre a et b tel que $f''(\alpha) = \dfrac{1}{2}(f''(a) + f''(b))$ ce qui donne le résultat souhaité. □

Exercice 16 (Inégalité d'Opial-Olech)
Soient $a > 0$ réel, $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

1. On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\int_0^a |f(t)f'(f)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}g(a)^2$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^a |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

1. Comme $|f'|$ est continue par composition, la fonction g est de classe C^1 via le théorème fondamental et on a $g' = |f'|$. Puis si $x \in [0, a]$ on a :

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f \right| \leqslant \int_0^x |f| = g(x)$$

donc on a :

$$\boxed{\int_0^a |ff'| \leqslant \int_0^a gg' = \frac{1}{2} g(a)^2}$$

2. Il suffit de montrer que $g(a)^2 \leqslant a \displaystyle\int_0^a f'^2$. Mais on a $g'^2 = f'^2$ et on veut donc montrer que :

$$g(a)^2 \leqslant a \int_0^a g'^2 \quad \text{i.e.} \quad \left(\int_0^a g' \right)^2 \leqslant a \int_0^a g'^2$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky affirme que :

$$\left(\int_0^a 1g' \right)^2 \leqslant \left(\int_0^a 1^2 \right) \left(\int_0^a g'^2 \right)$$

ce qui conduit au résultat. □

Exercice 17 (Le lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Si f est de classe C^1, démontrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t = 0 \quad (\clubsuit)$.
2. Démontrer que ($\clubsuit$) est encore vraie si f est une fonction en escalier.
3. En déduire que l'on a toujours ($\clubsuit$) sous l'hypothèse f continue par morceaux.

La première question est importante !

1. Lorsque f est C^1 on peut faire une intégration par parties. Pour $n \geqslant 1$ entier on a :

$$\int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t \quad = \quad \left\{ -f(t) \frac{\cos nt}{n} \right]_a^b + \int_a^b f'(t) \frac{\cos nt}{n} \,\mathrm{d}t$$

Mais f et f' sont continues sur $[a, b]$ qui est un segment donc bornées sur $[a, b]$. Ainsi on peut considérer $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$. On a alors par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \left| \left\{ -f(t) \frac{\cos nt}{n} \right]_a^b \right| + \left| \int_a^b f'(t) \frac{\cos nt}{n} \,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| -f(b) \frac{\cos nb}{n} + f(a) \frac{\cos na}{n} \right| + \int_a^b \left| f'(t) \frac{\cos na}{n} \right| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n} + (b - a) \frac{\|f'\|_\infty}{n} \end{aligned}$$

et ainsi par sandwich on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t = 0$$

2. Si f est une fonction en escalier on prend une subdivision $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ adaptée à f de sorte que :

$$f_{|]a_k, a_{k+1}[} = \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \{0, \ldots, N-1\}$$

Via Chasles (et en se rappelant que l'on ne modifie pas la valeur d'une intégrale en changeant la fonction intégrée en un nombre fini de points) on a pour $n \geqslant 1$ entier :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \lambda_k \sin nt\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left\{-\lambda_k\frac{\cos nt}{n}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\lambda_k}{n}(\cos na_k - \cos na_{k+1})
\end{aligned}$$

Enfin pour k fixé la suite $(\cos na_k - \cos na_{k+1})$ est bornée et $\dfrac{\lambda_k}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\lambda_k}{n}(\cos na_k - \cos na_{k+1}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et N étant fixé il vient :

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. Supposons maintenant que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue par morceaux. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors une fonction en escalier g définie sur $[a,b]$ telle que :

$$\|f-g\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Puis on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin nt\,dt - \int_a^b g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et ainsi :

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(tx)\,dt\right| \leqslant \left|\int_a^b g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or selon la question précédente $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0$ donc on dispose de N entier tel que si $n \geqslant N$ on ait :

$$\left|\int_a^b g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad\text{donc}\quad \left|\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue est ainsi démontré.

Exercice 18 (Indice)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1, 2π-périodique. On pose : $I(f) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(f)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

En considérant la fonction $v = f\mathrm{e}^{-u}$ où $u = \begin{pmatrix} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{f'(f)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$, démontrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

La fonction $v = f\mathrm{e}^{-u}$ est de classe C^1 comme produit de fonctions de classes C^1 et on a :

$$v' = f'\mathrm{e}^{-u} - fu'\mathrm{e}^{-u} = 0$$

donc v est constante. En particulier on a $v(0) = v(2\pi)$ i.e. $f(0)\mathrm{e}^{-u(0)} = f(2\pi)\mathrm{e}^{-u(2\pi)}$ et comme f est 2π-périodique et $u(0) = 0$, il vient :

$$\mathrm{e}^{u(2\pi)} = 1$$

Il en résulte que $u(2\pi) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et ainsi :

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{2i\pi}u(2\pi) \in \mathbb{Z}}$$

Commentaire. L'indice de f compte le nombre de tours que la courbe paramétrée f fait autour de 0.

Exercice 19 (Les intégrales de Wallis)
Pour tout n entier naturel on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$ entier on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$.
2. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
3. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} pour tout n entier.

IMPORTANT

- Pour $n \geqslant 2$ entier on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\ \cos x \,\mathrm{d}x \\ &\underbrace{=}_{IPP} \left\{\cos^{n-1}x\ \sin x\right] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\ \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x\,(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{nI_n = (n-1)I_{n-2}}$.

- On a $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = 1$ donc $I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Si maintenant pour $n \geqslant 1$ entier on a $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ alors, comme $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$ d'après ce qui précède, il vient :

$$I_{n+1}I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-1}I_n = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

et ainsi par récurrence on a bien :

$$\boxed{I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n} \ \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ entier}}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc :

$$\cos^n x \geqslant \cos^{n+1} x$$

Par croissance de l'intégrale on obtient de suite $I_n \geqslant I_{n+1}$ et ainsi la suite (I_n) est décroissante.

- On peut noter que $I_n \geqslant 0$ pour tout n entier naturel et si $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1} \ \text{ donc } \ I_{n+1}I_n \leqslant I_n^2 \leqslant I_n I_{n-1}$$

Il en résulte que : $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leqslant I_n^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2(n)}$ donc $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n)}}$.

Par sandwich on obtient de suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n)}}} = 1$ ce qui assure que

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Le relations $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ (pour $n\geqslant 0$ entier) et $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $I_=1$ donnent de suite :

$$\boxed{I_{2n}=\frac{1.3....(2n-1)}{2.4....2n}.\frac{\pi}{2}\quad \text{et}\quad I_{2n+1}=\frac{2.4....2n}{1.3....(2n+1)}}$$

Exercice 20 (Deux intégrales à paramètres)

1. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour x réel on pose

$$g(x)=\int_0^1 f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que l'on a ainsi correctement défini une fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui est de classe C^∞.

2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue. Pour x réel on pose : $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t$

Démontrer que l'on a ainsi correctement défini une fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui de plus est de classe C^1. Déterminer g'.

1. Tout d'abord, à x fixé, la fonction $t\mapsto f(t)\sin(x-t)$ est continue par morceaux donc l'intégrale (pas impropre) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ existe bien. Puis soit x réel. On a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 f(t)\left(\sin x\cos t-\cos x\sin t\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \sin x\int_0^1 \cos t\,\mathrm{d}t-\cos x\int_0^1 \sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi g est somme de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc est de classe C^∞.

2. Soit x réel. On fait le changement de variable $u=x+t$. On obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 f(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{x+1} f(u)\sin(u-x)\,\mathrm{d}u\\ &= \cos x\int_x^{x+1} f(u)\sin u\,\mathrm{d}u-\sin x\int_x^{x+1} f(u)\cos u\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Pour x réel on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)\sin u\,\mathrm{d}u$ et $G(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)\cos u\,\mathrm{d}u$.
Les fonctions $u\mapsto f(u)\sin u$ et $u\mapsto f(u)\cos u$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F et G sont de classe C^1 avec $F'=f\ \sin$ et $G'=f\ \cos$.
Puis pour x réel on a :

$$g(x)=\cos x(F(x+1)-F(x))-\sin x(G(x+1)-G(x))$$

Ainsi g est somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: elle est elle même de classe C^1. Pour $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x(F(x+1)-F(x))+\cos x(F'(x+1)-F'(x))\\ &\qquad -\cos x(G(x+1)-G(x))-\sin x(G'(x+1)-G'(x))\\ &= \cos x\left(f(x+1)\sin(x+1)-f(x)\sin x-\int_x^{x+1} f(u)\cos u\,\mathrm{d}u\right)\\ &\qquad -\sin x\left(\int_x^{x+1} f(u)\sin u\,\mathrm{d}u+f(x+1)\cos(x+1)-f(x)\cos x\right) \end{aligned}$$

Exercice 21

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. • Commençons par une remarque. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue alors
$$\exists\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{3\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
En effet, f étant continue, elle admet des primitives et si F est une de ses primitives on a :
$$\int_\varepsilon^{3\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = F(3\varepsilon)-F(\varepsilon)$$
Mais F est dérivable sur $\mathbb{R}$: elle est en particulier continue et ainsi
$$\exists\lim_{\varepsilon\to 0}F(3\varepsilon)-F(\varepsilon)=F(0)-F(0)=0$$
d'où le résultat annoncé.

Dans notre question, la fonction que l'on intègre n'est pas définie en 0 et cela ne rentre pas dans le cadre de ce qui vient d'être dit.

• Une idée féconde pour résoudre ce genre d'exercice est la suivante : **on retranche la partie principale**[1] **de la fonction intégrée au point où l'on cherche la limite et on la rajoute.** Ici, la partie principale de $\dfrac{\cos x}{x}$ en 0 est $\dfrac{1}{x}$.

On a :
$$\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\cos x-1}{x}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{=\log 3}$$

Puis $\dfrac{\cos x-1}{x}=\dfrac{-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)}{x}$ où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ donc $\displaystyle\exists\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x}=0$. Posons alors :
$$\begin{cases}\varphi(0)=0\\ \varphi(x)=\dfrac{\cos x-1}{x} & \text{pour } x\neq 0\end{cases}$$
La fonction φ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\displaystyle\exists\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\cos x-1}{x}\,\mathrm{d}x=0$.

Conclusion. $\boxed{\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{3\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=\log 3}$.

2. On procède de la même manière qu'à la question précédente. En 1 $\ln t$ se comporte comme $t-1$: la partie principale de $\dfrac{1}{\ln t}$ en 1 est $\dfrac{1}{t-1}$. On a alors :
$$\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}=\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t+\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t-1}$$
Puis $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=\{\log(|t-1|]_x^{x^2}=\ln(1+x)$ et pour t dans $]0,1[$ on a :
$$\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t-1}=\frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln t}$$

1. Je rappelle que la partie principale est le premier terme non nul d'un développement limité ou asymptotique non nul de la fonction.

Mais on a $\ln t = \ln 1 + (t-1) - \dfrac{(t-1)^2}{2} + (t-1)^2\varepsilon(t)$ où $\underset{t\to 1}{\varepsilon}(t) = 0$ (développement limité à l'ordre 2) donc :

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln t} = \frac{1}{2}$$

Posons alors :

$$\begin{cases} \varphi(0) = \dfrac{1}{2} \\ \varphi(x) = \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \quad \text{pour } x \in]0,1[\end{cases}$$

La fonction φ ainsi définie est continue sur $]0,1]$ et donc $\exists \lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Conclusion. $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \ln 2}$.

Exercice 22 (Le retour de Gronwall)
On considère deux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue telles qu'il existe une constante $c > 0$ avec :

$$f(x) \leqslant c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \geqslant 0$$

On veut démontrer de deux manières que : $f(x) \leqslant c \exp\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ pour tout $x \geqslant 0$.

1. Prouver le résultat demandé en considérant la fonction auxiliaire $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \left(c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) \exp\left(-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. Prouver le résultat demandé en pensant à $\dfrac{u'}{u}$.

1. Comme f et g sont continues, la fonctions φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\varphi'(x) = \left(f(x)g(x) - g(x)\left(c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\right) \exp\left(-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant 0$$

Il en résulte que φ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et ainsi pour tout $x \geqslant 0$ réel on a :

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(0) = c$$

Il vient donc pour tout $x \geqslant 0$:

$$c \geqslant \left(c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) \exp\left(-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant f(x) \exp\left(-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

ce qui prouve le résultat souhaité.

2. Pour tout $x \geqslant 0$, on a correctement :

$$\frac{f(x)}{c + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad \frac{f(x)g(x)}{c + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant g(x) \quad \text{car } g \geqslant 0$$

Il en résulte que pour tout $X \geqslant 0$ réel on a :

$$\int_0^X \frac{f(x)g(x)}{c + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^X g(x)\,\mathrm{d}x$$

et ainsi $\ln\left(c + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) - \ln c \leqslant \displaystyle\int_0^X g(x)\,\mathrm{d}x$. En passant à l'exponentielle on obtient alors le résultat souhaité.

Exercice 23
Déterminer les limites de suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{pn}$ (où $p \geqslant 2$ est fixé).
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ $(n \geqslant 1)$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^2}$ $(n \geqslant 1)$.
4. $u_n = n^{-3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sin \tfrac{k\pi}{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Rappelons tout d'abord le résultat que l'on va utiliser : lorsque $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Pour n entier naturel on a :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn} = \sum_{k=1} n(p-1)\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n(p-1)}\sum_{k=1} n(p-1)\frac{1}{\frac{1}{p-1}+\frac{k}{n(p-1)}}$$

Ainsi : $\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{p-1}+x} = \cdots = \log p}$.

2. Pour $n \geqslant 1$ entier on a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} + \frac{n}{2n^2}$$

donc $\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}}$.

3. On a pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

4. On a pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = n^{-3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sin\tfrac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2 \sin\tfrac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2 \sin\tfrac{k\pi}{n}$$

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 x^2 \sin \pi x\,\mathrm{d}x$. Deux IPP donnent alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}}$$

Exercice 24 (Intégrer pour dériver)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour tout x et y réels on ait : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. En considérant, pour x réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\mathrm{d}y$, démontrer que f est dérivable.
2. Expliciter l'application f.

Commentaire. L'idée est de gagner en régularité pour la fonction f : on passe de continue à dérivable (en fait C^∞ par ZIG-ZAG). On aura alors plus de liberté pour travailler avec la fonction f.

1. Le changement de variable affine $u = x + y$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\mathrm{d}y$ donne :

$$\int_0^1 f(x+y)\mathrm{d}y = \int_x^{x+1} f(u)\mathrm{d}u \quad (\clubsuit)$$

Mais par additivité de f et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 f(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y + f(x) \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Avec $(\clubsuit)$ et $(\clubsuit\clubsuit)$ il vient donc pour tout x réel :

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\int_x^{x+1} f(u)\mathrm{d}u}_{=G(x)} - \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \quad (\heartsuit)}$$

Notons alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Le théorème fondamental assure alors que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc G aussi et, toujours via $(\heartsuit)$, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

2. La fonction f est dérivable et pour tout x et y réels on a :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\spadesuit)$$

Fixons y réel. Par composition, $g : x \mapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x réel $g(x) = f(x) + f(y)$ donc $g'(x) = f'(x)$ i.e. $f'(x+y) = f'(x)$.

Ceci étant valable pour tout x et y réels on a donc en prenant $x = 0$:

$$f'(y) = f(0) \text{ pour tout } y \text{ réel}$$

La dérivée de f est donc constante et ainsi f est affine. Mais $(\spadesuit)$ assure que $f(0) = 0$ donc f est linéaire.

Exercice 25 (Calculs divers d'intégrales et de primitives)

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t + \sin t}$. **Indication** : on pourra poser $u = \tan \frac{t}{2}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}x\left(2\mathrm{sh}^3 x + 3\mathrm{ch}^3 x\right)}\,\mathrm{d}x$.
Indication : on pourra poser $u = \mathrm{th}x$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2} + 2x + 1}{x + \sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$.
Indication : on pourra poser $x = u^2 - 1$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.
Indication : on pourra poser à un moment $x = u^4 - 1$.
6. Calculer $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
Indication : on pourra poser $x = \sin u$.
7. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
Indication : on pourra poser $x = \operatorname{sh} u$.
8. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(-x^2+4*x+4)^{3/2}}$.
Indication : on écrira $-x^2+4x+4 = 8-(x-2)^2$ puis on posera $x-2 = \sqrt{8}\,\cos\theta$.
9. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.
Indication : on écrira $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ puis on posera $x+1 = \operatorname{sh}\theta$.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives et une primitive est F_0 donnée par, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \int_0^x \frac{e^{2t}}{1+e^t}dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}e^t dt = \int_1^{e^x} \frac{u}{1+u}du \text{ en posant } u = e^t \\ &= \int_1^{e^x} \frac{1+u-1}{1+u}du = \int_1^{e^x} \left(1-\frac{1}{1+u}\right)du \\ &= \left[u - \ln|1+u|\right]_1^{e^x} \end{aligned}$$

Les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonction de la forme :

$$x \longmapsto e^x - \ln|1+e^x| + c = e^x - \ln(1+e^x) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t} &= \int_0^1 \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \tfrac{2}{1+u^2}du \text{ en posant } u = \tan\frac{t}{2} \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{2u+1-u^2}du \text{ et on tombe en milieu connu...} \\ &= -2\int_0^1 \frac{1}{\left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right)}du = -2\int_0^1 \left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}-1} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}-1}\right)du \\ &\boxed{= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|u-1-\sqrt{2}\right| - \ln\left|u-1+\sqrt{2}\right|\right]_0^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}x\left(2\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{ch}^3 x\right)}\,dx &= \int_0^1 \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^4 x\left(2\operatorname{th}^3 x+3\right)}dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{th}^2 x}{2\operatorname{th}^3 x+3}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx \\ &= \int_0^{\operatorname{th}1} \frac{u^2}{2u^3+3}\,du \text{ en posant } u = \operatorname{th} x \\ &= \left[\frac{1}{6}\ln\left|2u^3+3\right|\right]_0^{\operatorname{th}1} = \frac{1}{6}\left(\ln\left(2\operatorname{th}^3 1+3\right) - \ln 3\right) \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}+2x+1}{x+\sqrt{x+2}}dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u+2u^2-3}{u^2-2+u}2udu \\
&\qquad \text{en posant } x=u^2-2 \text{ avec } u\in\mathbb{R}_+ \text{ (i.e. } u=\sqrt{x+2}) \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(u-1)(2u-3)}{(u-1)(u+2)}2udu = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2u^2-3u}{(u+2)}du \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{(2u-1)(u+2)+2}{(u+2)}du \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left((2u-1)+\frac{2}{(u+2)}\right)du \\
&= = 2\left[\frac{1}{4}(2u-1)^2+2\ln|u+2|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2-4\ln\left(\sqrt{2}+2\right)+4\ln\left(\sqrt{3}+2\right)
\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{\sqrt[4]{t+1}+\sqrt{t+1}}dt &= \int_0^1 \frac{t}{\sqrt[4]{t+1}+\left(\sqrt[4]{t+1}\right)^2}dt \\
&= \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{u^4-1}{u+u^2}4u^3du \\
&\qquad \text{en posant } t=u^4-1 \text{ avec } u\in\mathbb{R}_+ \text{ (i.e. } u=\sqrt[4]{t+1}) \\
&= 4\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{u^3(u-1)(u+1)\left(u^2+1\right)}{u(1+u)}du = 4\int_1^{\sqrt[4]{2}} u^2(u-1)\left(u^2+1\right)du \\
&= 4\int_1^{\sqrt[4]{2}} \left(u^5-u^4+u^3-u^2\right)du = 4\left[\frac{1}{6}u^6-\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{3}u^3\right]_1^{\sqrt[4]{2}} \\
&= \frac{37}{15}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{2}^3+\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt[4]{2}
\end{aligned}$$

6. La fonction intégrée est impaire donc :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

Ceux qui veulent faire le changement de variable peuvent tout de même le faire…

7. On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_{\text{argsh } 1}^{\text{argsh } 2} \frac{1}{\text{sh } u\sqrt{\text{sh}^2 u+1}}\text{ch } u\, du \text{ en posant } x=\text{sh } u \\
&= \int_{\text{argsh } 1}^{\text{argsh } 2} \frac{1}{\text{sh } u\text{ch } u}\text{ch } u\, du = \int_{\text{argsh } 1}^{\text{argsh } 2} \frac{1}{\text{sh } u}\, du \\
&= \int_{\text{argsh } 1}^{\text{argsh } 2} \frac{1}{\text{sh}^2 u}\text{sh } u\, du = \int_{\text{argsh } 1}^{\text{argsh } 2} \frac{1}{\text{ch}^2 u-1}\text{sh } u\, du \\
&= \int_{\text{ch argsh } 1}^{\text{ch argsh } 2} \frac{1}{v^2-1}dv \text{ en posant } v=\text{ch } u \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+1^2}}^{\sqrt{1+2^2}} \left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)dv \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|v-1|-\ln|v+1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Notons que poser au départ $v = \sqrt{x^2+1}$ fonctionnait (et pour cause...) aussi très bien :

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2+1-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{v^2-1}dv...$$

8. On trouve $x \mapsto \dfrac{x-2}{8\sqrt{-x^2+4*x+4}} + Cste$.

9. On trouve :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+1} - \frac{1}{2}\mathrm{Argth}(1/\sqrt{(x+1)^2+1}) + Cste$$