Feuille d'exercices sur l'intégration de première année.

Exercice 1
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Démontrer que f a un point fixe dans $]0,1[$.

Exercice 2
Déterminer les fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\,\|f\|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |fx)|$.

Exercice 3
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, de minimum m et de maximum M. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$$

Exercice 4 (Inégalité de Kantorovitch)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement positive, continue, de minimum m et de maximum M. Démontrer que :

$$1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \;\times \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

Exercice 5
Pour $a < b$ réels on pose : $E_{a,b} = \left\{ f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid f(0) = a \;\text{ et }\; f(1) = b \right\}$. On pose encore pour f dans $E_{a,b}$:

$$I(f) = \int_0^1 [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

On a donc une fonction $I : E_{a,b} \to \mathbb{R}$. Démontrer que I admet un minimum et le déterminer.

Exercice 6 (Théorème des deux zéros)
Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = 0$.
Démontrer que f admet au moins deux zéros sur $]0,\pi[$.

Exercice 7 (Inégalité de Young)
Soient a, b des réels positifs, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une bijection continue. Démontrer que :

$$ab \leqslant \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Indication : *on pourra considérer* $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - ax + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\ldots$

Exercice 8
Soient n entier naturel et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout k dans $\{0,\ldots,n\}$.
Démontrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $]0,1[$.

Indication : *on pourra procéder par récurrence.*

Exercice 9 (Le premier théorème de la moyenne)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ $C^0 - PM$. Alors il existe c dans $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 10 (Transformée de Hardy)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue et :

$$H_f = \begin{pmatrix}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que H_f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique alors H_f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 11 (Inégalités de Steffensen)
Soient f et g dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f est décroissante et $0 \leqslant g \leqslant 1$. On pose :

$$\lambda = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose pour x dans $[a, b]$: $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout x dans $[0, a]$ on a $0 \leqslant G(x) \leqslant x - a$. On peut alors poser correctement pour x dans $[a, b]$:
$$\psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Démontrer que φ et ψ sont dérivables, déterminer ψ' et montrer que $\varphi' \leqslant \psi'$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_{b-\lambda}^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 12
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$, continue. On suppose qu'il existe a réel tel que pour tout x dans $[0, 1]$ on ait : $f(x) \leqslant a\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Que dire de f ?

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x réel et tout $a > 0$ on ait :

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 14
Soient f et g deux fonctions croissantes et continues par morceaux sur $[a, b]$. Comparer :

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 15
Soit f dans $C^2([-1,1],\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe α dans $[-1,1]$ tel que : $f''(\alpha) = 3\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - 6f(0)$.

Exercice 16 (Inégalité d'Opial-Olech)
Soient $a > 0$ réel, $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

1. On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que :
$$\int_0^a |f(t)f'(f)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}g(a)^2$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^a |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 (Le lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Si f est de classe C^1, démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\sin nt\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (\clubsuit)$.
2. Démontrer que $(\clubsuit)$ est encore vraie si f est une fonction en escalier.
3. En déduire que l'on a toujours $(\clubsuit)$ sous l'hypothèse f continue par morceaux.

Exercice 18 (Indice)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1, 2π-périodique. On pose : $I(f) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(f)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$.
En considérant la fonction $v = f\mathrm{e}^{-u}$ où $u = \left(\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{f'(f)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}\right)$, démontrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 19 (Les intégrales de Wallis)
Pour tout n entier naturel on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$ entier on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a $I_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$.
2. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
3. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} pour tout n entier.

Exercice 20 (Deux intégrales à paramètres)

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour x réel on pose
$$g(x) = \int_0^1 f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$
Démontrer que l'on a ainsi correctement défini une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^∞.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. Pour x réel on pose : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t$
Démontrer que l'on a ainsi correctement défini une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui de plus est de classe C^1. Déterminer g'.

Exercice 21

1. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Exercice 22 (Le retour de Gronwall)

On considère deux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue telles qu'il existe une constante $c > 0$ avec :

$$f(x) \leqslant c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \geqslant 0$$

On veut démontrer de deux manières que : $f(x) \leqslant c \exp\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ pour tout $x \geqslant 0$.

1. Prouver le résultat demandé en considérant la fonction auxiliaire $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \left(c + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. Prouver le résultat demandé en pensant à $\dfrac{u'}{u}$.

Exercice 23

Déterminer les limites de suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{pn}$ (où $p \geqslant 2$ est fixé).
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ $(n \geqslant 1)$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^2}$ $(n \geqslant 1)$.
4. $u_n = n^{-3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sin\tfrac{k\pi}{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Exercice 24 (Intégrer pour dériver)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour tout x et y réels on ait : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. En considérant, pour x réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+y)\mathrm{d}y$, démontrer que f est dérivable.
2. Expliciter l'application f.

Exercice 25 (Calculs divers d'intégrales et de primitives)

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t + \sin t}$. **Indication** : on pourra poser $u = \tan\frac{t}{2}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}x\left(2\mathrm{sh}^3 x + 3\mathrm{ch}^3 x\right)}\,\mathrm{d}x$.
   Indication : on pourra poser $u = \mathrm{th}x$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x+2} + 2x + 1}{x + \sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$.
   Indication : on pourra poser $x = u^2 - 1$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.
   Indication : on pourra poser à un moment $x = u^4 - 1$.
6. Calculer $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
   Indication : on pourra poser $x = \sin u$.
7. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
   Indication : on pourra poser $x = \operatorname{sh} u$.
8. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(-x^2+4*x+4)^{3/2}}$.
   Indication : on écrira $-x^2+4x+4 = 8-(x-2)^2$ puis on posera $x-2 = \sqrt{8}\,\cos\theta$.
9. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.
   Indication : on écrira $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ puis on posera $x+1 = \operatorname{sh}\theta$.