# Feuille d'exercices n° 3. Espaces vectoriels normés I. Quelques corrections

**Exercice 1**
On note $E$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$ :

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt.$$

1. Démontrer que $\|\ \|$ définit une norme sur $E$.
   De même, $\|\ \|'$ est une norme sur $E$, il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b) Démontrer que les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont équivalentes sur $E$.
3. Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$ et on rappelle qu'il s'agit d'une norme sur $E$.
   a) Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$. Démontrer que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t$.
   b) En déduire que pour tout $f \in E$ on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|$.
   c) Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_1$ sont-elle équivalentes ?

**Exercice 2**
On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

1. a) Démontrer que $N_1$ et $N_\infty$ sont deux normes sur E.
   b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

**Exercice 3**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$ dans $E$, on pose : $N_1(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^n |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

1. Démontrer que $N_1$ et $N_\infty$ sont des normes sur $E$.
2. Démontrer que $N_\infty \leqslant N_1$.
3. Démontrer que les normes $N_\infty$ et $N_1$ ne sont pas équivalentes.

**Exercice 4**
Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $P \in E$ on pose : $\|P\|_A = \sup\limits_{x\in A} |P(x)|$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\|\ \|_A$ soit une norme sur $E$.

**Exercice 5**
Soit $E$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{|f(x)|}{1+|x|}$. Démontrer que $N$ est une norme sur $E$.

**Exercice 6**
Soit $E = \left\{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$. Pour $f$ dans $E$ on pose :

$$\begin{cases} \|f\|_1 & = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_2 & = \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

1. Démontrer $E$ est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce sont des normes sur $E$.
2. On note $F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\| \, \|_\infty$. On considère :

$$\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f + f' \end{pmatrix}.$$

   Démontrer que $\varphi$ est une application linéaire bijective et isométrique de $(E, \| \, \|_2)$ sur $(F, \| \, \|_\infty)$.
3. Démontrer que les normes $\| \, \|_1$ et $\| \, \|_2$ sont équivalentes.

**Exercice 7**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P$ dans $E$ on pose $H(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(n)\right|$. Montrer que $H$ est une norme sur $E$.

**Exercice 8**
On considère l'espace vectoriel $E = C^0([0,1],\mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$.

1. Justifier que $E$ est de dimension infinie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^{i2n\pi x}$.
   a) Montrer que $(\varphi_n)$ est une suite dans $E$.
   b) Démontrer que pour tout $p \neq q$ dans $\mathbb{N}$ on a : $\|\varphi_p - \varphi_q\|_2 = \sqrt{2}$.
   c) Démontrer que $(\varphi_n)$ n'admet pas de sous-suite convergente.

**Exercice 9**
Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
   **P1.** $f$ est continue sur $E$.
   **P2.** $f$ est continue en $0_E$.
   **P3.** $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.
2. Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|.$$

   On considère l'application $\varphi$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$. Démontrer que $\varphi$ est linéaire et continue.

**Exercice 10**
Soient $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in E$ on pose $\|P\| = \int_0^1 |P|$.

1. Montrer que $\| \, \|$ est une norme sur $E$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $P_n = \left(1 - X^2\right)^n$. Montrer que $(P_n)$ converge vers 0 dans $(E, \| \, \|)$.
3. L'application $\varphi : P \mapsto P(0)$ est-elle continue de $(E, \| \, \|) \to \mathbb{R}$ ?

**Exercice 11**
Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur $E$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour tout entier naturel $k$ non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(\mathrm{Id}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où $\mathrm{Id}_E$ représente l'endomorphisme identité de $E$.

1. Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$.
   a) Pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer $u^k(x)$.
   b) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.
2. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$. Démontrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.
3. En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.
4. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque.
   a) Démontrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de $E$, que l'on notera $p(x)$.
   b) Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où $I_n$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Démontrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $P$, telle que $P^2 = P$.

**Exercice 12**
Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\ \|_\infty$. On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de $E$.

1. Montrer que $|\!|\!|\ |\!|\!| : \varphi \mapsto \sup\limits_{f\in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. On considère l'application $\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f \end{pmatrix}$. Démontrer que $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$ et déterminer $|\!|\!|\varphi|\!|\!|$.

**Exercice 13**
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $E_+$ l'ensemble des $f$ de $E$ positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \displaystyle\int_0^1 |f|\varphi$.

1. Soit $\varphi \in E_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur $E$.
2. Soient $\varphi_1$ et $\varphi_2$ dans $E_+$. On suppose $\varphi_1 > 0$ et $\varphi_2 > 0$. Montrer que $\|\ \|_{\varphi_1}$ et $\|\ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\|\ \|_{x\mapsto x}$ et $\|\ \|_{x\mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient immédiatement. Quant à l'axiome de séparation, si on suppose que $|f|_\varphi = 0$ alors $\int_0^1 |f|\varphi = 0$ et $|f|\varphi = 0$, puisque la fonction intégrée est positive et continue. Si $\varphi$ ne s'annule pas on obtient directement $f = 0$ et sinon en notant $a_1, \dots, a_p$ les points (en nombre fini par hypothèse) où $\varphi$ s'annule on a $\forall x \in ]0,1] \setminus \{a_1, \dots, a_p\},\ f(x) = 0$ et par continuité aux points $a_1, \dots, a_p$ on a aussi $f(a_1) = \cdots = f(a_p) = 0$, donc $f = 0$.
2. Sur le fermé borné $[0,1]$ les fonctions continues $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont bornées et atteignent leurs bornes. Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et $\beta_2$, ici strictement positifs, tels que
$$\forall x \in ]0,1], \quad 0 < \alpha_1 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \beta_1 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0,1], \quad 0 < \alpha_2 \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \beta_2.$$
Il s'ensuit que $\forall x \in ]0,1],\ \frac{\alpha_2}{\beta_2}\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1}\varphi_1(x)$ et en multipliant par $|f(x)| \geqslant 0$ et en intégrant on obtient :
$$\forall f \in E, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}\|f\|_{\varphi_1} \leqslant \|f\|_{\varphi_2} \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1}\|f\|_{\varphi_1}.$$
3. La réponse est **NON.** Notons $\|\cdot\|_1$ la première norme et $\|\cdot\|_2$ la seconde. On a évidemment $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$ mais, pour la fonction continue $f_n$ définie par $f_n(x) = 1 - nx$ si $x \in ]0, \frac{1}{n}]$ et 0 si $x \in ]\frac{1}{n}, 1]$, on a
$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} x(1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6n^2} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \int_0^{1/n} x^2(1-nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12n^3},$$
ce qui prouve qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \alpha\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2$ ($\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} = 2n \to +\infty$). CQFD

**Exercice 14**
Soit $E$ l'ensemble des $(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général $x_n^2$ converge.

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'application qui à $(x_n) \in E$ associe $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2\right)^{1/2}$ définit une norme.
3. Soit $F\colon (x_n) \in E \mapsto x_0 \in \mathbb{R}$. L'application $F$ est-elle continue ?
4. Si $(x_n) \in E$, montrer que la suite de terme général $x_n + x_{n+1}$ est dans $E$. L'application $G\colon (x_n)_{n\geqslant 0} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n\geqslant 0} \in E$ est-elle continue ?

1. L'inégalité $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, montre que, si $(x_n)$ et $(y_n)$ appartiennent à $E$, alors la série de terme général $x_n y_n$ est absolument convergente, donc convergente.
Puis
   - L'ensemble $E$ est non vide car il contient la suite nulle.
   - Il est stable par le produit par un scalaire (évident).
   - Il est stable par la somme, car si $(x_n)$ et $(y_n)$ appartiennent à $E$, alors $0 \leqslant (x_n + y_n)^2 = x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n$, qui est une somme de trois termes de séries convergentes, donc $\sum (x_n + y_n)^2$ converge.

   Ainsi $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. On va plutôt montrer que $(x,y) \in E^2 \mapsto \langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ définit un produit scalaire sur $E$, et la proposition demandée en résulte ($x \mapsto \|x\|$ sera la norme euclidienne associée à ce produit scalaire).
Tout d'abord, pour tout $(x,y) \in E^2$, la série de terme général $x_n y_n$ converge (vu plus haut). Ensuite, la bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Enfin, $\langle x, x\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = 0$ si et seulement si $x$ est la suite nulle.
3. L'application $F$ est clairement linéaire, et lipschitzienne de rapport 1 car
$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \quad |F(x)| = |x_0| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2} = \|x\|.$$
Il en résulte que $F$ est continue.

4. De l'inégalité $(x_n + x_{n+1})^2 \leqslant 2(x_n^2 + x_{n+1}^2)$, on déduit d'une part que $(x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E$, et d'autre part que

$$\|G(x)\|^2 \leqslant 2\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n^2 + x_{n+1}^2) = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2 - x_0^2) \leqslant 4\|x\|^2.$$

Comme $G$ est manifestement linéaire, il résulte de cette inégalité de qu'elle est 2-lipschitzienne, donc continue.

**Exercice 15**
Soit $\ell^\infty$ le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites bornées. On munit $\ell^\infty$ de la norme infinie $\|\ \|_\infty$. Si $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on note $\Delta(u)$ la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme continu de $\ell^\infty$.
2. Calculer $|||\Delta|||$ (voir exercice 12).

Pour tout $u = (u_n) \in \ell^\infty$, on a $|\Delta(u)| \leqslant 2\|u\|$ donc $\Delta(u) \in \ell^\infty$. De plus, $\Delta$ est linéaire et

$$\|\Delta(u)\| \leqslant 2\|u\|$$

donc elle est aussi continue et $|||\Delta||| \leqslant 2$.

Pour $u = ((-1)^n)$, on a $\|\Delta(u)\| = 2$, et donc $|||\Delta||| = 2$