

---

Feuille d'exercices n° 3. Espaces vectoriels normés I.

---

**Exercice 1**

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  
On pose pour  $f \in E$  :

$$\|f\| = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

1. Démontrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $E$ .  
De même,  $\|\cdot\|'$  est une norme sur  $E$ , il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.  
b) Démontrer que les deux normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes sur  $E$ .
3. Pour  $f \in E$  on pose  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  et on rappelle qu'il s'agit d'une norme sur  $E$ .
  - a) Soient  $f \in E$  et  $x \in [0, 1]$ . Démontrer que  $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt$ .
  - b) En déduire que pour tout  $f \in E$  on a  $\|f\|_1 \leq \|f\|$ .
  - c) Les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_1$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 2**

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E$ ,  $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$  et  $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

1. a) Démontrer que  $N_1$  et  $N_\infty$  sont deux normes sur  $E$ .  
b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .
2. Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 3**

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  dans  $E$ , on pose :  $N_1(P) = \sum_{k=0}^n |a_k|$  et  $N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$ .

1. Démontrer que  $N_1$  et  $N_\infty$  sont des normes sur  $E$ .
2. Démontrer que  $N_\infty \leq N_1$ .
3. Démontrer que les normes  $N_\infty$  et  $N_1$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 4**

Soient  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Pour  $P \in E$  on pose :  $\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\|\cdot\|_A$  soit une norme sur  $E$ .

**Exercice 5**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions lipschitziennes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
2. Pour  $f \in E$  on pose  $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + |x|}$ . Démontrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .

**Exercice 6**

Soit  $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ . Pour  $f$  dans  $E$  on pose :

$$\begin{cases} \|f\|_1 &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ \|f\|_2 &= \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

1. Démontrer  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et que ce sont des normes sur  $E$ .
2. On note  $F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On considère :

$$\varphi = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f + f' \end{pmatrix}.$$

Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire bijective et isométrique de  $(E, \|\cdot\|_2)$  sur  $(F, \|\cdot\|_\infty)$ .

3. Démontrer que les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes.

**Exercice 7**

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $P$  dans  $E$  on pose  $H(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(n)|$ . Montrer que  $H$  est une norme sur  $E$ .

**Exercice 8**

On considère l'espace vectoriel  $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$  muni de la norme  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$ .

1. Justifier que  $E$  est de dimension infinie.
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$  on considère  $\varphi_n : x \mapsto e^{i2n\pi x}$ .
  - a) Montrer que  $(\varphi_n)$  est une suite dans  $E$ .
  - b) Démontrer que pour tout  $p \neq q$  dans  $\mathbb{N}$  on a :  $\|\varphi_p - \varphi_q\|_2 = \sqrt{2}$ .
  - c) Démontrer que  $(\varphi_n)$  n'admet pas de sous-suite convergente.

**Exercice 9**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur le corps  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
  - P1.**  $f$  est continue sur  $E$ .
  - P2.**  $f$  est continue en  $0_E$ .
  - P3.**  $\exists k > 0$  tel que :  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ .
2. Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

On considère l'application  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ . Démontrer que  $\varphi$  est linéaire et continue.

**Exercice 10**

Soient  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour tout  $P \in E$  on pose  $\|P\| = \int_0^1 |P|$ .

1. Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $P_n = (1 - X^2)^n$ . Montrer que  $(P_n)$  converge vers 0 dans  $(E, \|\cdot\|)$ .
3. L'application  $\varphi : P \mapsto P(0)$  est-elle continue de  $(E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$  ?

**Exercice 11**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$  telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout  $x \in E$ ,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\text{Id}_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1}),$$

où  $\text{Id}_E$  représente l'endomorphisme identité de  $E$ .

1. Soit  $x \in \ker(u - \text{Id}_E)$ .
  - a) Pour  $k \in \mathbb{N}$  déterminer  $u^k(x)$ .
  - b) En déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$ .
2. Soit  $x \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ . Démontrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$ .
3. En déduire que  $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ .
4. Soit  $x \in E$ , un vecteur quelconque.
  - a) Démontrer que la suite  $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un vecteur de  $E$ , que l'on notera  $p(x)$ .
  - b) Interpréter géométriquement l'application  $p : E \rightarrow E$  ainsi définie.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée  $\|\cdot\|$ , sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , telle que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on ait  $\|AX\| \leq \|X\|$ . Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}), \quad (2)$$

où  $I_n$  est la matrice identité dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

5. Démontrer que la suite de matrices  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vers une matrice  $P$ , telle que  $P^2 = P$ .

**Exercice 12**

Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On note  $\mathcal{L}_c(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes continus de  $E$ .

1. Montrer que  $\|\cdot\| : \varphi \mapsto \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$  est une norme sur  $\mathcal{L}_c(E)$ .
2. On considère l'application  $\varphi = \left( \begin{array}{c} E \rightarrow E \\ f \mapsto F : x \mapsto \int_0^x f \end{array} \right)$ . Démontrer que  $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$  et déterminer  $\|\varphi\|$ .

**Exercice 13**

Soient  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  et  $E_+$  l'ensemble des  $f$  de  $E$  positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si  $f \in E$

et  $\varphi \in E_+$ , on pose  $\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f| \varphi$ .

1. Soit  $\varphi \in E_+$ . Montrer que l'application  $f \mapsto \|f\|_\varphi$  définit une norme sur  $E$ .
2. Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  dans  $E_+$ . On suppose  $\varphi_1 > 0$  et  $\varphi_2 > 0$ . Montrer que  $\|\cdot\|_{\varphi_1}$  et  $\|\cdot\|_{\varphi_2}$  sont équivalentes.
3. Les normes  $\|\cdot\|_{x \rightarrow x}$  et  $\|\cdot\|_{x \rightarrow x^2}$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 14**

Soit  $E$  l'ensemble des  $(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que la série de terme général  $x_n^2$  converge.

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Montrer que l'application qui à  $(x_n) \in E$  associe  $\|(x_n)\| = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \right)^{1/2}$  définit une norme.
3. Soit  $F: (x_n) \in E \mapsto x_0 \in \mathbb{R}$ . L'application  $F$  est-elle continue?
4. Si  $(x_n) \in E$ , montrer que la suite de terme général  $x_n + x_{n+1}$  est dans  $E$ . L'application  $G: (x_n)_{n \geq 0} \in E \mapsto (x_n + x_{n+1})_{n \geq 0} \in E$  est-elle continue?

**Exercice 15**

Soit  $\ell^\infty$  le sous-espace de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  formé des suites bornées. On munit  $\ell^\infty$  de la norme infinie  $\| \cdot \|_\infty$ . Si  $u = (u_n) \in \ell^\infty$ , on note  $\Delta(u)$  la suite de terme général  $u_{n+1} - u_n$ .

1. Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme continu de  $\ell^\infty$ .
2. Calculer  $\|\Delta\|$  (voir exercice 12).