

Feuille d'exercices n° 15. Calcul différentiel

Quelques corrections

Exercice 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t dans I .

1. On pose pour $t \in I$: $f(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$. Démontrer que pour tout t dans I , $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$.
2. Déterminer les arcs paramétrés $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ne passant pas par l'origine, tels que pour tout $t \in I$ la famille $(c(t), c'(t))$ soit liée.

1. Méthode 1 - « La bonne »

Pour tout $t \in I$ on a $\|f(t)\| = 1$ donc $\|f(t)\|^2 = 1$ et en dérivant :

$$2 \langle f(t), f'(t) \rangle = 0.$$

Méthode 2 - Avec calcul de f'

La fonction $g : t \mapsto \|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle$ est de classe C^1 sur I et on a pour tout t dans I :

$$g'(t) = 2 \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Ainsi la fonction $\lambda : t \mapsto \frac{1}{\|\gamma(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{g(t)}}$ est de classe C^1 sur I avec, pour tout t dans I :

$$\lambda'(t) = -\frac{g'(t)}{2g(t)^{3/2}}.$$

Il en résulte que la fonction f est de classe C^1 sur I avec, pour tout t dans I :

$$f'(t) = \lambda'(t)\gamma(t) + \lambda(t)\gamma'(t) = -\frac{\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|^3}\gamma(t) + \frac{1}{\|\gamma(t)\|}\gamma'(t)$$

On obtient alors de suite pour tout t dans I : $\langle f(t), f'(t) \rangle = 0$.

2. *Analyse.* Supposons que $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un arc paramétré de classe C^1 ne passant pas par l'origine, tels que pour tout $t \in I$ la famille $(c(t), c'(t))$ soit liée.

Il existe donc une fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout t dans I on a $c'(t) = \lambda(t)c(t)$.

Pour t dans I on pose alors $f(t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}$ de sorte que l'on définit une fonction de classe C^1 sur I qui vérifie, pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = -\frac{\langle c(t), \lambda(t)c(t) \rangle}{\|c(t)\|^3}c(t) + \frac{1}{\|c(t)\|}\lambda(t)c(t) = 0.$$

Comme I est un intervalle, f est constante et il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $t \in I$ on a :

$$f(t) = \vec{v} \quad \text{i.e.} \quad c(t) = \|c(t)\| \vec{v}.$$

On a de plus $\|\vec{v}\| = 1$.

Synthèse. Soit $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^n$ de norme 1. Tout arc paramétré de la forme $c : t \mapsto \lambda(t)\vec{v}$ où λ est une fonction de I dans $\mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 convient.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - y)e^{x-y}$.

1. Déterminer les points critiques de f .

2. Etudier les extrema locaux de f .

1. • $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• La fonction $(x, y) \mapsto x - y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Comme $\exp$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, par composition $(x, y) \mapsto e^{x-y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et par produit, f est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

• Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial_1 f(x, y) = e^{x-y}(1+x-y) \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = -e^{x-y}(1+x-y).$$

Ainsi on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ point critique de } f &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y}(1+x-y) = 0 \\ e^{x-y}(1+x-y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 1+x-y = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des points critiques de f est donc la droite d d'équation $x - y = -1$.

2. • On considère la fonction φ définie pour t réel par $\varphi(t) = te^t$. Cette fonction est C^∞ et on a pour tout t réel :

$$\varphi'(t) = e^t(1+t),$$

qui est du signe de $1+t$. Cette fonction φ est donc strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$: elle admet en -1 un minimum global strict qui est $\varphi(-1) = -\frac{1}{e}$.

• Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a donc, en posant $t = x - y$:

$$f(x, y) = \varphi(t) \geq -\frac{1}{e}.$$

Mais pour tout point critique (x_0, y_0) on a $f(x_0, y_0) = \varphi(-1) = -\frac{1}{e}$. Il en résulte que f admet un minimum global en tout point de la droite d qui est $-\frac{1}{e}$.

Exercice 3

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'équation $F(x, y) = 0$ d'inconnue y dans $\mathbb{R}$.
b) Déterminer et tracer l'allure de la ligne de niveau 0 de F .
3. Déterminer les points critiques de F .
4. L'application F présente-t-elle des extrema locaux ?
5. Montrer que la restriction de F à toute droite passant par l'origine $O = (0, 0)$ admet un minimum strict en O .
6. La fonction F admet-elle des extrema globaux ?

1. La fonction F est polynomiale : elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. a) On trouve sans problème $y = x^2$ ou $y = 3x^2$.

b) Notons D la ligne de niveau 0 de F . D'après la question précédente, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in D &\Leftrightarrow F(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - x^2)(y - 3x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x^2 \quad \text{ou} \quad y = 3x^2 \end{aligned}$$

On peut alors tracer sans problème cette ligne de niveau (voir figure 1).

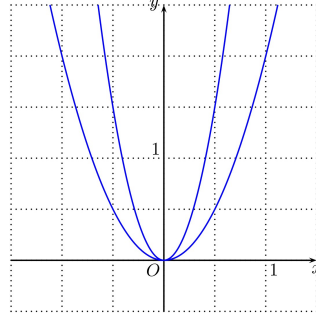


FIGURE 1 – Ligne de niveau 0 de la fonction F

3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 F(x, y) = 0 \\ \partial_2 F(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(3x^2 - 2y) = 0 \\ 2(y - 2x^2) = 0 \end{cases}$$

On trouve que $(0, 0)$ est le seul point critique de f .

4. Si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, c'est en un point critique, donc en $(0, 0)$. Puis $F(0, 0) = 0$ et, pour tout x non nul, on a :

$$\begin{cases} F(x, 0) = 3x^4 > 0 \\ F(x, 2x^2) = -x^4 < 0 \end{cases}$$

Conclusion. F n'admet pas d'extremum local.

5. Soit d une droite passant par l'origine. L'équation réduite de d a deux formes possibles.
 — Soit l'équation de d est $x = 0$ et alors, pour tout $(x, y) \in d$, on a : $F(x, y) = y^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $y = 0$.
 — Soit l'équation de d est de la forme $y = ax$ avec a réel. Pour tout $(x, y) \in d$, on a alors :

$$F(x, y) = 3x^4 - 4ax^3 + a^2x^2.$$

L'étude de la fonction $g_a : x \mapsto 3x^4 - 4ax^3 + a^2x^2$ montre que celle-ci admet en $x = 0$ un minimum local.

Conclusion. La restriction de F à toute droite passant par l'origine $O = (0, 0)$ admet un minimum strict en O .

6. F n'a pas d'extremum local, a fortiori, elle n'admet pas d'extremum global.

Exercice 4

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(v) = \frac{1}{2} {}^t X A X + {}^t U X,$$

où X est la colonne de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que f est de classe C^1 .
2. Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, non nul, on a ${}^t X A X > 0$.
3. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f .

1. Soit $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour la suite de l'exercice, on écrit $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a alors :

$$f(v) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 3xy + ax + by.$$

Ainsi la fonction f est polynomiale : elle est de classe C^2 .

2. On a $\det A > 0$ et $\text{tr} A > 0$: les valeurs propres de A sont strictement positives. Ainsi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. • On a, pour $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(v) = (5x + 3y + a, 3x + 7y + b).$$

On peut remarquer que le colonne des coordonnées de $\nabla f(v)$ n'est autre que $AX + U$ ($\clubsuit$).

On a alors :

$$\nabla f(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = -a \\ 3x + 7y = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26x = -7a + 3b \\ -26y = -3a + 5b \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 7L_1 - 3L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - 5L_2 \end{matrix}$$

Ainsi f admet un seul point critique qui est : $v_0 = \frac{1}{26}(-7a + 3b, 3a - 5b)$.

La matrice hessienne de f en ce point critique est la matrice A qui est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet en v_0 un minimum local strict.

- La colonne X_0 des coordonnées de v_0 est donnée par $AX_0 = -U$ d'après ($\clubsuit$). Il vient alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ de colonne de coordonnées X :

$$\begin{aligned} f(v) - f(v_0) &= \frac{1}{2} {}^t X A X + \underbrace{{}^t U X}_{=-{}^t X_0 A X} - \frac{1}{2} {}^t X_0 A X_0 - \underbrace{{}^t U X_0}_{=-{}^t X_0 A X_0} \\ &= \frac{1}{2} {}^t X A X + \frac{1}{2} {}^t X_0 A X_0 - {}^t X_0 A X \\ &= \frac{1}{2} \|X - X_0\|_*^2 \end{aligned}$$

où $\| \cdot \|_*$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $(X, Y) \mapsto {}^t Y A X$ sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Ainsi f admet un minimum global strict en v_0 .

Rappel important. Lorsque $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $(X, Y) \mapsto {}^t Y A X$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2(1 - x^2) + y^2(1 - y^2) + 2xy$.

1. a) Déterminer le gradient $\nabla f(x, y)$ de f au point courant (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
- b) Déterminer les extrema locaux de f .

2. a) Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.

En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(x, y) \leq 2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.

- b) Déterminer les extrema globaux de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = 2t - \frac{t^2}{2}$.
- c) En déduire que f n'est pas minorée et admet un maximum global (on précisera le(s) point(s) où ce maximum est atteint et la valeur de ce maximum).

1. a) La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4x^3 + 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4y^3 + 2x.$$

Conclusion. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\nabla f(x, y) = (2x - 4x^3 + 2y, 2y - 4y^3 + 2x)$.

b) Les points critiques de f sont ceux où le gradient de f s'annule. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x^3 + y = 0 \\ y - 2y^3 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - x^3 = 0 \\ y - 2y^3 + x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y - 2y^3 + x = 0 \end{cases} \quad (\text{puisque la fonction cube est injective}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x(1 - x)(1 + x) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion. Les points critique de f sont $m_0 = (0, 0)$, $m_1 = (1, 1)$ et $m_2 = (-1, -1)$.

Déterminons les extrema locaux de f .

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 - 12x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 12y^2.$$

La matrice hessienne de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est : $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 12x^2 & 2 \\ 2 & 2 - 12y^2 \end{pmatrix}$.

• En $m_1 = (1, 1)$, la matrice hessienne est $\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$

On a $\det \nabla^2 f(1, 1) > 0$ donc les valeurs propres de $\nabla^2 f(1, 1)$ sont non nuls et de même signe. Comme $\text{tr} \nabla^2 f(1, 1) < 0$ les valeurs propres de $\nabla^2 f(1, 1)$ sont strictement négative.

Conclusion. f admet en m_1 un maximum local strict.

• Les mêmes calculs montrent que f admet en m_2 un maximum local strict.

• En $m_0 = (0, 0)$, on a $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ici $\det \nabla^2 f(0, 0) = 0$: le produit des valeurs propres est nul. A priori on ne peut rien dire. Mais :

- pour x réel non nul proche de 0 on a : $f(x, 0) - f(0, 0) = x^2(1 - x^2) > 0$;
- pour x réel non nul proche de 0 on a : $f(x, -x) = -2x^4 < 0$.

Il en résulte que f n'admet pas d'extremum relatif en m_0 .

2. a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 &\Leftrightarrow 2x^2 + y^4 \geq x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi.

Puis $f(x, y) = (x + y)^2 - x^4 - y^4$ et, de la même manière que ci-dessus, $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Il vient donc :

$$f(x, y) \leq 2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^2.$$

b) La fonction g est polynomiale : elle est de classe C^∞ . Pour t réel on a : $g'(t) = 2 - t$. Ainsi g croît strictement sur $] -\infty, 2]$ et décroît strictement sur $[2, +\infty[$.

Conclusion. La fonction g admet un maximum global en 2 qui est $g(2) = 2$.

c) • Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) \leq g(x^2 + y^2) \quad (\clubsuit)$$

Mais, par exemple, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x^2) = -\infty$, donc $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = -\infty$: la fonction f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$.

• D'après la question précédente et $(\clubsuit)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x, y) \leq 2 = f(m_1) = f(m_2)$. Ainsi f admet un maximum global en m_1 et m_2 dont la valeur est 2.

Puis si m est un point de $\mathbb{R}^2$ où f admet un maximum global alors m est un point critique de f (f est C^1 et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}$). Or on a vu que m ne peut être m_0 : c'est nécessairement m_1 ou m_2 .

Conclusion. f admet un maximum global, qui est 2, atteint en m_1 et m_2 uniquement.

Exercice 6

Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x+y} + e^{3-x} + e^{3-y}$.

- On peut rapidement montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \dots$
 - Déterminons les points critiques de f .
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) &= e^{x+y} - e^{3-x} \\ \partial_2 f(x, y) &= e^{x+y} - e^{3-y} \end{cases}$$

On a ainsi les équivalences :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ point critique de } f &\Leftrightarrow \nabla f(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^{3-x} \\ e^{x+y} = e^{3-y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 - x \\ x + y = 3 - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = 1 \end{aligned}$$

Ainsi f admet un seul point critique qui est $m_0 = (1, 1)$. Notons que : $f(m_0) = 3e^2$.

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{cases} \partial_{1,1}^2 f(x, y) &= e^{x+y} + e^{3-x} \\ \partial_{2,2}^2 f(x, y) &= e^{x+y} + e^{3-y} \\ \partial_{1,2}^2 f(x, y) &= e^{x+y} \end{cases}$$

La matrice hessienne de f en $m = (x, y)$ est donc :

$$\nabla^2 f(m) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + e^{3-x} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + e^{3-y} \end{pmatrix}$$

Son déterminant et sa trace sont strictement positifs (immédiat) donc ses valeurs propres sont strictement positives. Il en va de même pour $\nabla^2 f(m_0)$ donc f admet en m_0 un minimum local strict. **Commentaire.**

« On sait » en fait qu'il y a en m_0 un maximum global strict. Montrons le, à l'aide de Taylor-intégrale, cette fois.

- Soit $m \in \mathbb{R}^2$ différent de m et $v = m - m_0$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = f(m_0 + tv).$$

D'après le cours g est de classe C^2 avec :

$$\begin{cases} g'(t) &= \langle \nabla f(m_0 + tv), v \rangle \\ g''(t) &= q_{m_0+tv}(v) \end{cases}$$

où q_{m_0+tv} est la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f en $m_0 + tv$.

Écrivons alors la formule de Taylor-Intégrale à l'ordre 1 pour g entre 0 et 1. On a :

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t) dt.$$

Mais m_0 est un point critique, donc $g'(0) = 0$. De plus $g''(t) = q_{m_0+tv}(v) > 0$ pour tout t dans $[0, 1]$ car on a vu que la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^n$ a des valeurs propres positives. On a donc, en notant que $g(0) = f(m_0)$ et $g(1) = f(m_0 + v) = f(m)$:

$$f(m) - f(m_0) > 0.$$

Il en résulte que f admet en m_0 un minimum global strict.

Autre méthode pour les extrema globaux. Via l'inégalité arithmético-géométrique qui dit que pour a, b, c des réel positifs on a :

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \int_0^{+\infty} (t^2 - tx + 2y)^2 e^{-t} dt$. Étudier les extrema de f .

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{+\infty} (t^4 + t^2 x^2 + 4y^2 - 2t^3 x - 4txy + 4t^2 y) e^{-t} dt \\ &= \underbrace{x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_{=\Gamma(3)} + \underbrace{4y^2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt}_{=\Gamma(1)} - \underbrace{4xy \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt}_{=\Gamma(2)} - \underbrace{2x \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt}_{=\Gamma(4)} \\ &\quad + \underbrace{4y \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt}_{=\Gamma(3)} + \underbrace{\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt}_{=\Gamma(5)} \\ &= 2x^2 + 4y^2 - 4xy - 12x + 8y + 24 \end{aligned}$$

2. La fonction f est polynomiale sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc de classe C^2 . Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) &= 4x - 4y - 12 \\ \partial_2 f(x, y) &= 8y - 4x + 8 \end{cases}$$

Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ point critique de } f &\Leftrightarrow \nabla f(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 &= 0 \\ -x + 2y + 2 &= 0 \end{cases} \left\| \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 4 \\ y &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction f admet un seul point critique qui est $(4, 1)$ et on a : $f(4, 1) = 32 + 4 - 16 - 48 + 8 + 24 = 4$.

3. • Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det \nabla^2 f(x, y) > 0$ ce qui permet de dire que les valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ ont même signe et sont non nulles. Comme $\text{tr} \nabla^2 f(x, y) > 0$, les valeurs propres de $\nabla^2 f(x, y)$ sont strictement positives : f admet en $(4, 1)$ un minimum local strict qui est $f(4, 1) = 4$.

Commentaire. Comme la hessienne est définie positive en tout point de $\mathbb{R}^2$, « on sait » que f admet en fait un minimum global strict en $(4, 1)$.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(4, 1) &= 2x^2 + 4y^2 - 4xy - 12x + 8y + 24 - 4 \\ &= 2(x^2 - 2xy - 6x) + 4y^2 + 8y + 20 \\ &= 2[(x - (y + 3))^2 - (y + 3)^2] + 4y^2 + 8y + 20 \\ &= 2(x - (y + 3))^2 + 2y^2 - 4y + 2 \\ &= 2(x - (y + 3))^2 + 2(y - 1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $f(x, y) - f(4, 1) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $y = 1$ et $x - 4 = 0$ i.e. $(x, y) = (4, 1)$. On a donc un minimum global strict en $(4, 1)$ qui est 4.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.

1. Étudier les extrema locaux de la fonction f .
2. Démontrer que si $|x| + |y| \geq 4$ alors $f(x, y) \geq 0$.
3. Déterminer les extrema globaux de f .

1. • La fonction f est polynomiale donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{cases} \partial_1 f(m) &= -4(x - y) + 4x^3 \\ \partial_2 f(m) &= 4(x - y) + 4y^3 \end{cases}$$

- Déterminons les points critiques de f . Pour $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \nabla f(m) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x - y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x - y) + 4y^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x - y) + 4x^3 = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x - y) + 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x + x^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $m_0 = (0, 0)$, $m_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $m_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

- La matrice hessienne de f au point courant m de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\nabla^2 f(m) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- On a $f(m_0) = 0$ et $\nabla^2 f(m_0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. On a $\det \nabla^2 f(m) = 0$ donc on ne peut rien affirmer.

Mais :

- pour x réel non nul : $f(x, x) = 2x^4 > 0$;
- pour x réel non nul : $f(x, 0) = -2x^2 + x^4 < 0$ si x est au voisinage de 0.

Ainsi f n'admet pas en m_0 d'extremum local.

- On a $f(m_1) = -8$ et $\nabla^2 f(m_1) = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$. Ainsi $\det \nabla^2 f(m_1) > 0$: les valeurs propres de $\nabla^2 f(m_1)$ sont de même signe. Comme $\text{tr} \nabla^2 f(m_1) > 0$, elles sont positives : f admet en m_1 un minimum local strict.

- De même f admet en m_2 un minimum local strict

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $|x| + |y| \geq 4$. On a alors :

$$x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \geq \frac{1}{8}(|x| + |y|)^4 \underset{RUSE}{=} \frac{1}{8} \underbrace{(|x| + |y|)^2}_{\geq 16} (|x| + |y|)^2 \geq 2(|x| + |y|)^2 \geq 2(x - y)^2.$$

Ainsi $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4 \geq 0$

3. Si f admet un extremum global en m alors m est un extremum local de f donc $m = m_1$ ou m_2 . Rappelons que $f(m_1) = f(m_2) = -8$.
 Soit maintenant $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 4\}$, qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la restriction de la fonction f à K , $f|_K$, qui est continue, admet un point m de K un minimum global
 Or pour tout q hors de K , $f(q) \geq 0 \geq f(m_1) \geq f(m)$, donc f admet en m un minimum global et on a vu que l'on a alors $m = m_1$ ou $m = m_2$.

Exercice 9

Soit $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Etudier les extrema de f .

Bien noter que $[0, 1]^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ (pavé...). Toute la « machinerie » vue avec les points critiques et la matrice hessienne ne s'applique pas!!!! On va contourner cette difficulté.

- Tout d'abord f est continue (comme fraction rationnelle) sur le fermé borné $[0, 1]^2$ de $\mathbb{R}^2$: elle admet donc un maximum et un minimum global.

Notons aussi que $f \geq 0$ et, pour $(x, y) \in [0, 1]^2$ on a :

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Ainsi f admet un minimum global strict en $(0, 0)$ qui est 0.

- Soit g la restriction de f à l'ouvert $]0, 1[^2$. Cette fonction est de classe C^2 car c'est une fraction rationnelle (noter que pour f ça n'a pas de sens de parler de fonction C^2 puisque $[0, 1]^2$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$). Pour $(x, y) \in]0, 1[^2$ on a :

$$\begin{aligned} \partial_1 g(x, y) &= \frac{(1+x^2)(1+y^2) - (x+y)2x(1+y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \\ &= \frac{(1+y^2)[1+x^2-2x^2-2xy]}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \\ &= \frac{(1+y^2)(1-x^2-2xy)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \end{aligned}$$

Par symétrie des variables dans la fonction g , on a :

$$\partial_2 g(x, y) = \frac{(1+x^2)(1-y^2-2xy)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}.$$

Ainsi, pour $(x, y) \in]0, 1[^2$, on a les équivalences :

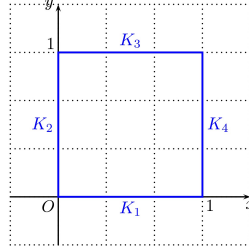
$$\begin{aligned} \nabla g(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2-2xy = 0 \\ 1-y^2-2xy = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 1-x^2-2xy = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 1-3x^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte que g admet un seul point critique qui est $m_0 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Notons que $f(m_0) = \frac{2/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}}$.

- On va maintenant étudier la restriction de f au bord de $[0, 1]^2$.

Le bord de $[0, 1]^2$ est l'union des quatre segments $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ (voir figure).



— On va étudier la restriction de f au segment

$$K_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y = 0\}.$$

Pour $(x, y) \in K_1$ on a $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2}$.

On considère donc la fonction $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

La fonction f_1 est C^∞ sur $[0, 1]$ comme fraction rationnelle. Si $x \in [0, 1]$ on a :

$$f_1'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0,$$

dès que $x \neq 1$. Ainsi f_1 est strictement croissante et admet un maximum en 1 de valeur $\frac{1}{2}$.

— On étudie maintenant la restriction de f à

$$K_3 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y = 1\}.$$

Pour $(x, y) \in K_3$ on a $f(x, y) = \frac{x+1}{2(1+x^2)}$. On considère donc la fonction $f_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_3(x) = \frac{x+1}{2(1+x^2)}.$$

La fonction f_3 est C^∞ sur $[0, 1]$ comme fraction rationnelle. Si $x \in [0, 1]$ on a :

$$f_3'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x(x+1)}{1+x^2} = \frac{-2x^2-4x+2}{1+x^2}.$$

Ainsi $f_3'(x)$ est du signe de $-x^2-2x+1$. On a $\Delta = 8$ et les racines de ce trinôme sont donc :

$$x_1 = -\frac{1}{2}(2-\sqrt{8}) = \sqrt{2}-1 \quad \text{et} \quad x_2 = -1-\sqrt{2}.$$

Il en résulte que f_3 est strictement croissante sur $[0, x_1]$ et strictement décroissante sur $[x_1, 1]$: elle admet un maximum global strict en x_1 dont la valeur est :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+(\sqrt{2}-1)^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2(1+2-2\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Comparons ce résultat avec $1/2$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 8-4\sqrt{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{2} < 8 \\ &\Leftrightarrow 72 < 64 \end{aligned}$$

Cette dernière propriété est profondément stupide. On a donc $\frac{\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$.

— Par symétrie des variables, il est inutile d'étudier la restriction de f à K_2 et $K_4 \dots$

- **Synthèse de l'étude.** Sur le bord de $[0, 1]^2$, la restriction de f admet un maximum global qui est $\frac{\sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}}$ et sur $]0, 1[^2$ la restriction de f admet un maximum local strict qui est $\frac{9}{8\sqrt{3}}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}} < \frac{9}{8\sqrt{3}} &\Leftrightarrow \sqrt{2} \times 8\sqrt{3} < 9(8 - 4\sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow 64 \times 6 < 81(8 - 4\sqrt{2})^2 \\ &\Leftrightarrow 64 \times 6 < 81(64 + 32 - 64\sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow 2 < 27(1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow 27\sqrt{2} < 27 \times \frac{3}{2} - 2 \end{aligned}$$

On a donc $\frac{\sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}} < \frac{9}{8\sqrt{3}}$ et f atteint son maximum global en

Exercice 10

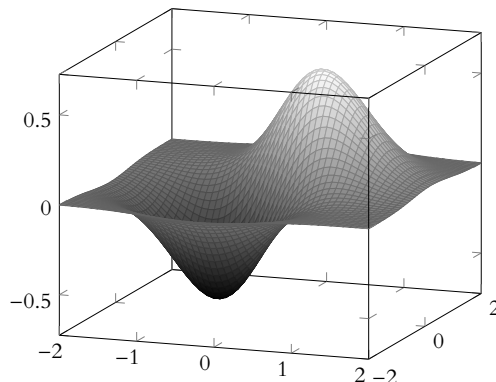
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right).$$

1. Diagonaliser la matrice J_n .
2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer que f_n possède deux points critiques $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.
4. Déterminer les extrema locaux de f_n .
5. a) Etudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.
b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

- c) Dédire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.
6. Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



1. La matrice J_n est non nulle et toutes ses colonnes sont identiques : elle est de rang 1. D'après le théorème du rang $\ker J_n$ est de dimension $n - 1$. Comme $n \geq 2$, on peut conclure que 0 est valeur propre de J_n et que l'espace propre associé est de dimension $n - 1$.

On a aussi $J_n = nV_n$. Comme $V_n \neq 0$, c'est bien un vecteur propre de J_n pour la valeur propre n . Ainsi 0 et n sont valeurs propres de J_n .

Puis on a $J_n^2 = nJ_n$ donc $X^2 - nX = X(X - n)$ est un polynôme annulateur de J_n : les valeurs propres de J_n sont parmi les racines de $X^2 - nX$ qui sont 0 et n . On peut conclure que les valeurs propres de J_n sont donc 0 et n .

2. • $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale.

- Comme $t \mapsto e^{-t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, par composition, l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$$

est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

- $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale.

Par produit f_n est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3. • Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned}\partial_i(f_n)(x) &= \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\ &= \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\end{aligned}$$

- Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned}x \text{ point critique de } f_n &\Leftrightarrow \nabla f_n(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \left(1 = 2x_i \sum_{k=1}^n x_k\right)\end{aligned}$$

- Supposons que x soit un point critique de f_n . En sommant les n égalités précédentes, il vient : $n = 2s^2$ où $s = \sum_{k=1}^n x_k$. De là $s = -\sqrt{\frac{n}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a alors :

$$x_i = \frac{1}{2s}$$

- Réciproquement, si on a $s = -\sqrt{\frac{n}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{n}{2}}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = \frac{1}{2s}$ alors x est bien un point critique de f_n

Conclusion. La fonction f_n possède deux points critiques $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.

4. • Soient $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\partial_{i,i}^2 f_n(x) &= \left(-2 \sum_{k=1}^n x_k - 2x_i\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\ &= \left(-4x_i + (4x_i^2 - 2) \sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\end{aligned}$$

et, si $i \neq j$:

$$\begin{aligned}\partial_{i,j}^2 f_n(x) &= (-2x_i) \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k\right) (-2x_j) \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\ &= \left(-2x_i - 2x_j + 4x_i x_j \sum_{k=1}^n x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\end{aligned}$$

• Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, on a, en remplaçant dans l'expression trouvée à la question précédente :

$$\begin{aligned}\partial_{i,j}^2 f(a) &= \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \frac{2}{n} \times \sqrt{\frac{n}{2}}\right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}\end{aligned}$$

On a encore pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}\partial_{i,i}^2 f(a) &= \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + \left(\frac{2}{n} - 2\right) \sqrt{\frac{n}{2}}\right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(-\frac{4}{\sqrt{2n}} + (2 - 2n) \sqrt{\frac{1}{2n}}\right) e^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2ne}} (2n + 1)\end{aligned}$$

La hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } H_n &\Leftrightarrow (\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\})(H_n X = \lambda X) \\ &\Leftrightarrow (\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \left(\frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n) X = \lambda X \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \left((nI_n + J_n) X = -\frac{\sqrt{2ne}}{2} \lambda X \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \left(J_n X = -\left(\frac{\sqrt{2ne}}{2} \lambda + n \right) X \right) \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{\sqrt{2ne}}{2} \lambda + n \right) \text{ valeur propre de } J_n\end{aligned}$$

On a donc $-\left(\frac{\sqrt{2ne}}{2} \lambda + n \right) = 0$ ou $-\left(\frac{\sqrt{2ne}}{2} \lambda + n \right) = n$ ce qui amène $\lambda = -\sqrt{\frac{2n}{e}}$ ou $\lambda = -2\sqrt{\frac{2n}{e}}$.

Conclusion. $\text{Spec}(H_n) = \left\{ -2\sqrt{\frac{2n}{e}}, -\sqrt{\frac{2n}{e}} \right\}$.

Les valeurs propres de H_n sont strictement négatives : f_n admet en a un maximum local strict.

• Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ on a $f(-x) = -f(x)$, donc f_n admet en b un minimum local strict.

5. a) Cette fonction h est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[:$
elle admet un maximum global en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui est $\frac{1}{\sqrt{2e}}$

- b) Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky, on a

$$\langle u, x \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|x\|^2,$$

ce qui donne immédiatement $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.

c) D'après les questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{n}{\sqrt{2n}} \exp \left(- \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} \right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \exp \left(- \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{n}{2e}}. \end{aligned}$$

De plus, on trouve d'après la question précédente que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right).$$

Si l'on pose $t = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \geq 0$, alors ceci amène :

$$f_n(x) \leq \sqrt{n} t e^{-t^2} = \sqrt{n} h(t).$$

Or h admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en $1/\sqrt{2}$, de valeur $1/\sqrt{2e}$. En particulier, $h(t) \leq 1/\sqrt{2e}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ce qui entraîne que :

$$f_n(x) \leq \sqrt{n} h(t) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{n}{2e}} = f_n(a).$$

En résumé, on vient de montrer que $f_n(x) \leq f_n(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, avec égalité si et seulement si $x = a$, et donc :

f_n admet un maximum global en a et (de la même manière, un minimum global en b)

- Dans le cas $n = 2$, la nappe donnée par l'énoncé est acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 . En effet, comme cela a été montré aux questions précédentes, le graphe de f_2 (comme c'est le cas pour cette nappe) présente un maximum global et un minimum global, lesquels sont atteints en des points opposés par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11

Soient $n \geq 1$ entier, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et α réel. On dit que f est *positivement homogène de degré α* ($ph - \alpha$) lorsque pour tout $t > 0$ réel et m dans $\mathbb{R}^n$ on a : $f(tm) = t^\alpha f(m)$.

- Donner des exemples de cette notion.
- On suppose que f est de classe C^1 . Démontrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité d'EULER :

$$\langle \nabla f(m), m \rangle = \alpha f(m) \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{R}^n.$$

- On suppose que $n = 2$ et que f est C^2 . On définit g dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en posant pour $m = (x, y)$:

$$g(m) = x \frac{\partial f}{\partial x}(m) + y \frac{\partial f}{\partial y}(m).$$

- Démontrer que si $\Delta f = 0$ alors $\Delta g = 0$.
- Y-a-t-il réciproque ?

- Par exemple, les applications linéaires sont $ph - 1$, les formes quadratiques sont $ph - 2 \dots$

2. • On suppose que f est positivement homogène de degré α . On fixe $m \in \mathbb{R}^n$ et on considère la fonction :

$$g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R},$$

définie, pour $t > 0$, par $g(t) = f(tm)$. Cette fonction g est de classe C^1 par composition. Pour $t > 0$, on a :

$$g'(t) = \langle \nabla f(tm), m \rangle.$$

Mais on a aussi, pour $t > 0$, $g(t) = t^\alpha f(m)$, donc $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(m)$. Il vient donc, pour tout $t > 0$:

$$\langle \nabla f(tm), tm \rangle = tg'(t) = \alpha t^\alpha f(m).$$

On prend $t = 1$ pour obtenir l'identité d'Euler.

- Réciproquement, on suppose que f vérifie l'identité d'Euler. On fixe $m \in \mathbb{R}^n$ et on considère la même fonction g que ci-dessus. On a de même, pour tout $t > 0$:

$$g'(t) = \langle \nabla f(tm), m \rangle.$$

Il vient alors, pour $t > 0$: $tg'(t) = \langle \nabla f(tm), tm \rangle = \alpha f(tm) = \alpha g(t)$. De là, pour $t > 0$, $g(t) = C \exp\left(\alpha \int_1^t \frac{du}{u}\right) = Ct^\alpha$, où C est une constante réelle.

De plus $C = g(1) = f(m)$, ce qui prouve que, pour tout $t > 0$, on a : $f(tm) = t^\alpha f(m)$.

3. a) Calculons Δg . Désignons par x et y les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} \end{aligned}$$

$$\text{Il vient par symétrie : } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}.$$

Ainsi on a :

$$\Delta g = 2\Delta f + x \frac{\partial}{\partial x} \Delta f + y \frac{\partial}{\partial y} \Delta f$$

Si donc $\nabla f = 0$ alors $\nabla g = 0$.

- b) Soit maintenant $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\Delta g(m) = 2\Delta f(m) + \langle \nabla(\Delta f)(m), m \rangle.$$

Supposons $\Delta g = 0$. Il en résulte que Δf est positivement homogène de degré -2 . De là, pour tout m dans $\mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$ on a : $\Delta f(tm) = t^{-2} \Delta f(m)$.

On fixe m . Si $\Delta f(m) \neq 0$, on fait tendre t vers 0 pour obtenir l'absurdité $\Delta f(0) = +\infty$. Il y a donc réciproque.

Exercice 12

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $F(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\partial_1 F(x,y) + y\partial_2 F(x,y) = 0.$$

Démontrer que $F = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.

- a. Calculer les dérivées partielles $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
b. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

3. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$(\spadesuit) \quad g(0,0) = 0 \quad \text{et pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\partial_1 g(x,y) + y\partial_2 g(x,y) = f(x,y)$$

- On pose $m = (x, y)$. On a $\phi = F \circ c$ où $c :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $c(t) = tm$. Selon le cours ϕ est dérivable et :

$$\phi'(t) = \langle \nabla F(c(t)), c'(t) \rangle = x\partial_1 F(tm) + y\partial_2 F(tm).$$

Pour $t \neq 0$, on a donc $\phi'(t) = \frac{1}{t} (tx\partial_1 F(tm) + ty\partial_2 F(tm)) = 0$ d'après les hypothèses sur F .

Ainsi ϕ est constante sur chacun des intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, sa valeur est $\phi(1) = F(m)$. De plus, comme ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que ϕ est constante sur $\mathbb{R}$ de valeur $\phi(1) = F(m)$.

- Comme $\phi(0) = F(0, 0) = 0$, on a donc $\phi(1) = 0$ i.e. $F(x, y) = 0$. Ceci étant valable quelque soit le choix initial de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, F est la fonction nulle.

- a. On a :

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{2y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

- Les applications partielles de f en $(0, 0)$ sont nulles donc

$$\partial_1 f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(0, 0) = 0.$$

- Pour montrer que f est de classe C^1 , il suffit de vérifier que les application partielle sont continues en $(0, 0)$. Mais pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$ on a :

$$|\partial_1 f(x, y) - \partial_1 f(0, 0)| = 2 \frac{|y|^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Mais on a : $2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2 = \|(x, y)\|^4$ donc :

$$|\partial_1 f(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2} \|(x, y)\|^3}{\|(x, y)\|^2} = 2\sqrt{2} \|(x, y)\| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

Les dérivées partielles sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$.

- La fonction $h = \frac{1}{2}f$ convient.

- On suppose que g convient et on pose $G = g - h$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. La dérivation étant linéaire, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x\partial_1 G(x, y) + y\partial_2 G(x, y) &= x\partial_1 g(x, y) + y\partial_2 g(x, y) - x\partial_1 h(x, y) + y\partial_2 h(x, y) \\ &= f(x, y) - f(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Selon la question 1, G est la fonction nulle, donc $g = h$.

Conclusion. La fonction h est la seule solution du problème posé.

Exercice 13 (Réduction des matrices symétriques réelles)

Soit $n \geq 1$ est entier naturel. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est notée $\| \cdot \|$. La sphère unité de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire l'ensemble des vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|v\| = 1$, est notée S^{n-1} .

- Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\ker \beta \subset \ker \alpha$. Démontrer qu'il existe λ réel vérifiant : $\alpha = \lambda\beta$.
- Soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout t dans $] - 1, 1[$ on ait :

$$\|\gamma(t)\| = 1.$$

Démontrer que, pour tout t dans $] - 1, 1[$, on a : $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$.

- Soit $m \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|m\| = 1$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$, non nul, orthogonal à m . Démontrer qu'il existe une application $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , telle que $\gamma(0) = m$, $\gamma'(0) = v$ et, pour tout t dans $] - 1, 1[$, on ait

$$\|\gamma(t)\| = 1.$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et g sa restriction à S^{n-1} .
- Justifier que g admet des extrema globaux sur S^{n-1} .
 - En considérant une application $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'à la question précédente, démontrer que, si g admet en m un extremum relatif, alors il existe λ réel vérifiant :

$$\nabla f(m) = \lambda m.$$

5. Soit A une matrice symétrique réelle, que l'on confond avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

- Démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = 2Ax$.
- Soit x un extremum de g , restriction de f à S^{n-1} . Démontrer que x est un vecteur propre de A .

1. • Si $\ker \alpha = \mathbb{R}^n$, alors $\alpha = 0$ et $\alpha = \lambda\beta$ avec $\lambda = 0$.

• On suppose donc $\ker \alpha$ de dimension $n - 1$ et par égalité des dimensions on a $\ker \alpha = \ker \beta$. On écrit $\mathbb{R}^n = \ker \alpha \oplus \text{vect}(a)$ où a est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Pour x dans $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$h(x) = \alpha(a)\beta(x) - \beta(a)\alpha(x).$$

h est une forme linéaire et pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ écrit $x = y + \mu a$ selon la somme directe $\mathbb{R}^n = \ker \alpha \oplus \text{vect}(a)$ on a :

$$h(x) = \mu\alpha(a)\beta(a) - \mu\beta(a)\alpha(a) = 0.$$

Ainsi $\beta = \frac{\beta(a)}{\alpha(a)}\alpha$, correctement, puisque $\alpha(a) \neq 0$.

2. La fonction $h = t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ est de classe C^1 par composition et sa dérivée est donnée, pour $t \in]-1, 1[$, par :

$$h'(t) = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle.$$

Comme h est constante de valeur 1, il vient $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$ pour tout t dans $] - 1, 1[$.

3. On pose, pour $t \in]-1, 1[$: $\gamma(t) = \frac{m + tv}{\|m + tv\|}$.

Cela est correct car pour tout $t \in]-1, 1[$ on a, puisque m et v sont orthogonaux :

$$\|m + tv\|^2 = \underbrace{\|m\|^2}_{=1} + t^2 \|v\|^2 > 0.$$

La courbe γ est à valeurs dans S^{n-1} et vérifie $\gamma(0) = m$.

Il reste à montrer que γ est de classe C^1 avec $\gamma'(0) = v$. Ecrivons $m = (a_1, \dots, a_n)$ et $v = (x_1, \dots, x_n)$. On a alors, pour $t \in]-1, 1[$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + tx_i)^2}} (a_1 + tx_1, \dots, a_n + tx_n).$$

Ainsi, γ est de classe C^1 par composantes.

Puis si on a $\frac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u}{2} + o(u)$. De là :

$$\frac{1}{\|m + tv\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \|v\|^2}} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} \|v\|^2 + o(t^2) = 1 + o(t^2).$$

De là, $\gamma(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} (m + tv)(1 + o(t))$, donc :

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} v + \vec{o}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} v.$$

4. a. g est continue sur le compact S^{n-1} : elle admet donc un minimum et un maximum.
- b. On suppose que g admet en m un extremum relatif. Soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'à la question 3. On considère l'application $h :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h = g \circ \gamma$. Cette application est de classe C^1 et sa dérivée est donnée, pour $t \in]-1, 1[$, par :

$$\gamma'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Comme h admet en 0 un extremum relatif, on a $\gamma'(0) = 0$, donc $\langle \nabla f(m), v \rangle = 0$. Il en résulte que $v \in \nabla f(m)^\perp$ qui est le noyau de la différentielle df_m . Mais ceci est vrai quelque soit le choix de v dans $m^\perp : m^\perp \subset \ker df_m$. Mais $m^\perp$ est le noyau de la forme linéaire $w \mapsto \langle m, w \rangle$: selon la question 1, il existe λ réel tel que, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$:

$$df_m(w) = \lambda \langle m, w \rangle.$$

Il en résulte que, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(m) - \lambda m, w \rangle = 0$, donc $\nabla f(m) - \lambda m \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$.

5. a. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j,$$

de sorte que : $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} dx_i dx_j$.

La fonction f étant polynomiale, elle est de classe C^1 , et, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \underbrace{\frac{\partial (dx_i dx_j)}{\partial x_k}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \delta_i^k dx_j + \delta_j^k dx_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{k,j} dx_j + \sum_{i=1}^n a_{i,k} dx_i = 2 \sum_{i=1}^n a_{i,k} dx_i \end{aligned}$$

On a bien $\nabla f(x) = 2Ax$.

- b. On a vu que g admet sur S^{n-1} un maximum et un minimum. Soit x un point de S^{n-1} où g admet un extremum. D'après la question 4., il existe λ réel tel que :

$$\nabla f(x) = \lambda x.$$

Ainsi $Ax = \frac{\lambda}{2}x$ et comme x est non nul, c'est un vecteur propre de A . □

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On dit que f est *convexe* lorsque pour tout m et p dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $[0, 1]$ on a : $f((1-t)m + tp) \leq (1-t)f(m) + tf(p)$.

- Soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1 , $\inf(f_1, f_2)$, $\sup(f_1, f_2)$?
 - Lorsque $n = 1$, a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?
- Démontrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(m, p) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on a :

$$f(p) - f(m) \geq \langle \nabla f(m), p - m \rangle$$

- On suppose que f est convexe. Si m_0 est un point critique de f , démontrer que f admet en m_0 un minimum global.
- Dans cette question A est une matrice symétrique réelle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est définie par :

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

- Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire que si f est convexe, toutes les valeurs propres de A sont positives.

1. a. • Soient m et p dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $[0, 1]$. On pose $c(t) = (1-t)m + tp$ et $g = f_1 + f_2$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(c(t)) &= f_1(c(t)) + f_2(c(t)) \\ &\leq \underbrace{(1-t)f_1(m) + tf_2(p) + (1-t)f_2(m) + tf_1(p)}_{=(1-t)g(m) + tg(p)} \quad \text{par convexité de } f_1 \text{ et } f_2 \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction $f_1 + f_2$ est convexe .

• Soient m et p dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $[0, 1]$. On pose $c(t) = (1-t)m + tp$ et $h = \alpha f_1$. Lorsque $\alpha \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(c(t)) &= \alpha f_1(c(t)) \\ &\leq \underbrace{\alpha((1-t)f_1(m) + tf_2(p))}_{=(1-t)h(m) + th(p)} \quad \text{car } f_1 \text{ convexe et } \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

Si maintenant $\alpha < 0$, on obtient $h(c(t)) \geq (1-t)h(m) + th(p)$

Conclusion. La fonction αf_1 est convexe exactement lorsque $\alpha \geq 0$ ou $f_1 = 0$.

• Soient m et p dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $[0, 1]$. On pose $c(t) = (1-t)m + tp$ et $h = \sup(f_1, f_2)$. On a deux cas :

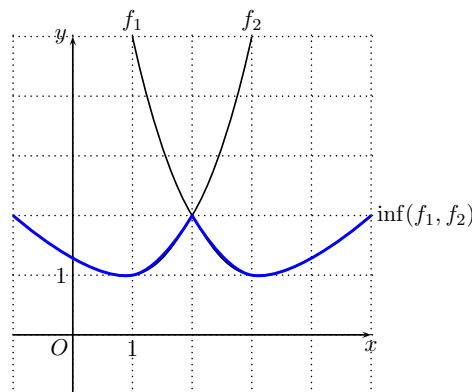
— Si $h(c(t)) = f_1(c(t))$ alors :

$$\begin{aligned} h(c(t)) &= f_1(c(t)) \\ &\leq \underbrace{(1-t)f_1(m)}_{\geq 0} + \underbrace{tf_2(p)}_{\leq h(p)} \quad \text{car } f_1 \text{ convexe} \\ &\leq (1-t)h(m) + th(p) \end{aligned}$$

— Si $h(c(t)) = f_2(c(t))$, on obtient de même $h(c(t)) \leq (1-t)h(m) + th(p)$.

Conclusion. La fonction $\sup(f_1, f_2)$ est convexe .

• De manière générale, on ne peut pas dire que $\inf(f_1, f_2)$ est convexe comme le montre le contre-exemple suivant :



b. Lorsque $n = 1$, et lorsque f_1 est croissante, on a bien $f_1 \circ f_2$ convexe (vérification immédiate par la définition). Cependant en prenant $f_1 : x \mapsto e^{-x}$ et $f_2 : x \mapsto x^2$, on a $f_1'' \geq 0$ et $f_2'' \geq 0$ (donc f_1 et f_2 sont convexes) mais, pour x réel,

$$f_1 \circ f_2(x) = e^{-x^2},$$

donc $(f_1 \circ f_2)'(x) = -2xe^{-x^2}$ et $(f_1 \circ f_2)''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$, donc $(f_1 \circ f_2)''$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $f_1 \circ f_2$ n'est pas convexe.

2. • On suppose que f est convexe. Soient m et p dans $\mathbb{R}^n$. On considère l'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = f(tp + (1-t)m).$$

Comme f est C^1 , g est dérivable et on a :

$$g'(t) = \langle \nabla f(tp + (1-t)m), p - m \rangle.$$

En particulier, $g'(0) = \langle \nabla f(m), p - m \rangle$. Mais, pour $t > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(0)}{t} &= \frac{1}{t} (f((1-t)m + tp) - f(m)) \\ &\leq \frac{1}{t} ((1-t)f(m) + tf(p) - f(m)) \\ &\leq f(p) - f(m) \end{aligned}$$

On fait tendre correctement t vers 0 (les limites existent !) dans cette inégalité pour obtenir $g'(0) \leq f(p) - f(m)$, ce qui donne le résultat souhaité.

- On suppose que pour tout m et p dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$f(p) - f(m) \geq \langle \nabla f(m), p - m \rangle.$$

Soient m et p dans $\mathbb{R}^n$ et soit t dans $[0, 1]$. On pose $c(t) = (1-t)m + tp$. Par hypothèse, on a :

$$\begin{cases} f(p) - f(c(t)) \geq \langle \nabla f(c(t)), p - c(t) \rangle & (1) \\ f(m) - f(c(t)) \geq \langle \nabla f(c(t)), m - c(t) \rangle & (2) \end{cases}$$

On fait $t \times (1) + (1-t) \times (2)$ pour obtenir :

$$(1-t)f(m) + tf(p) - f(c(t)) \geq \underbrace{\langle \nabla f(c(t)), tp + (1-t)m - c(t) \rangle}_{=0},$$

ce qui prouve la convexité de f .

3. Supposons que m_0 soit un point critique de f . Soit m dans $\mathbb{R}^n$. D'après la question précédente on a :

$$f(m) - f(m_0) \geq \langle \nabla f(m_0), m - m_0 \rangle = 0.$$

Ainsi f admet en m_0 un minimum global.

4. On écrit $A = [a_{i,j}]$. Noter que dans cette question, on confond, avec l'énoncé, la matrice A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

- a. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a classiquement :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

Ainsi f est une fonction polynomiale : elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

- b. • Déterminons le gradient de f . Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, notons $\varphi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la k -ième fonction coordonnée. On a alors :

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varphi_i \varphi_j.$$

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il vient :

$$\begin{aligned} \partial_k f(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \underbrace{\partial_k(\varphi_i)(x)}_{=\delta_i^k} \underbrace{\varphi_j(x)}_{=x_j} + \underbrace{\varphi_i(x)}_{=x_i} \underbrace{\partial_k(\varphi_j)(x)}_{=\delta_j^k} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^n a_{i,k} x_i \end{aligned}$$

Par symétrie de la matrice A il vient alors : $\partial_k f(x) = 2 \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j$, et on reconnaît la k -ième composante du vecteur $2Ax$.

Conclusion. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a : $\nabla f(x) = 2Ax$.

• Supposons maintenant que f est convexe. Soit x_0 un point critique de f . On a donc $Ax_0 = 0$ et f admet en x_0 un minimum global, selon la question 3. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) \geq f(x_0) = 0$. En particulier, si λ est valeur propre de A , il existe x non nul tel que $Ax = \lambda x$ et ainsi :

$$0 \leq f(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \|x\|^2,$$

d'où $\lambda = \frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq 0$.

Conclusion. Si f est convexe, les valeurs propres de A sont positives.

Exercice 15

Soit n un entier, tel que $n \geq 2$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de la norme associée notée $\| \cdot \|$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée, on considère $B \in \mathbb{R}^n$, et on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(X) = {}^t X A X \quad \text{et} \quad F(X) = \Phi(X) - 2 {}^t B X.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha \|X\|^2 \leq \Phi(X) \leq \beta \|X\|^2.$$

2. a) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$F(X + H) = F(X) + \langle \nabla F(X), H \rangle + \Phi(H).$$

- b) Expliciter $F(X)$ pour $X \in \mathbb{R}^n$, à l'aide des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ de X et des coefficients de la matrice A et du vecteur B . Justifier que F est de classe C^2 .
- c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que $\nabla F(X) = 2(AX - B)$.
- d) Démontrer que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?

Dans la suite, on note R le point de $\mathbb{R}^n$ où F atteint son minimum.

3. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq R$.
En utilisant le résultat de la question 3a, déterminer la valeur de α réel qui minimise $F(X - \alpha \nabla F(X))$.
Calculer ce minimum.

4. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit :

- une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
- une suite (α_k) de réels

en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F(X_k) \quad \text{et} \quad \alpha_k = \begin{cases} \frac{\|\nabla F(X_k)\|^2}{2\Phi(\nabla F(X_k))} & \text{si } X_k \neq R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de α_k et de $\nabla F(X_k)$ et montrer que la suite $(F(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge.
- b) Étudier la convergence la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

1. La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale :
il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale et P orthogonale telles que $A = PD^tP$.
Les coefficients λ_i sont les valeurs propres de A , donc sont strictement positifs. Ainsi, on posant
 $Y = {}^tPX$, il vient : $\Phi(X) = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. De plus, la matrice P étant orthogonale, on a :
 $\|Y\| = \|X\|$. Donc, en prenant $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$ et $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$:

$$\alpha \|X\|^2 = \alpha \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \Phi(X) \leq \beta \sum_{i=1}^n y_i^2 = \beta \|X\|^2.$$

2. a) Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$F(X+H) - F(X) = 2{}^tHAX + \Phi(H) - 2\langle B, H \rangle = \langle \nabla F_X, H \rangle + \Phi(H).$$

- b) • En écrivant F en fonction des coordonnées du vecteur X , il vient :

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

- La fonction F est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

- c) Pour tout indice i : $\partial_i F(X) = 2a_{i,i}x_i + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}x_j - 2b_i$.

Ainsi, en terme de matrices, il vient : $\boxed{\nabla F_X = 2(AX - B)}$.

- d) Le seul point critique est donc le point R , solution unique (car A inversible) de $AX = B$. De plus, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$, $F(R+H) - F(R) = \Phi(H) > 0$ (question 1), donc au point R on a un minimum global de F .

Dans la suite, on note R le point de $\mathbb{R}^n$ où F atteint son minimum.

3. En remplaçant H par ∇F_X dans le résultat de la question 3a, on obtient :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= F(X - \alpha \nabla F(X)) \\ &= F(X) - \langle \nabla F(X), \alpha \nabla F(X) \rangle + \Phi(\alpha \nabla F_X) \\ &= \alpha^2 \Phi(\nabla F(X)) - \alpha \langle \nabla F_X, \nabla F(X) \rangle + F(X) \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré en α . Le minimum est atteint pour $\alpha = \frac{\|\nabla F(X)\|^2}{2\Phi(\nabla F(X))}$ et sa valeur est : $F(X) - \frac{\|\nabla F(X)\|^4}{4\Phi(\nabla F(X))}$.

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned} F(X_{k+1}) - F(X_k) &= \alpha_k^2 \Phi(\nabla F(X_k)) - \alpha_k \|\nabla F(X_k)\|^2 = g(\alpha_k) - F(X_k) \\ &= -\frac{\|\nabla F(X_k)\|^4}{4\Phi(\nabla F(X_k))} \end{aligned}$$

La suite $(F(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée (par $F(R)$) : elle converge.

- b) On remarque que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (F(X_{k+1}) - F(X_k)) = 0$ et ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|\nabla F(X_k)\|^4}{4\Phi(\nabla F(X_k))^2} = 0$.

Puis par la question 2, il vient :

$$\frac{\|\nabla F(X_k)\|^4}{4\Phi(\nabla F(X_k))^2} \geq \frac{\|\nabla F(X_k)\|^4}{4\beta \|\nabla F(X_k)\|^2}$$

et ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla F(X_k)\|^2 = 0$.

- Comme $\nabla F_{X_k} = 2(AX_k - B)$, on a $X_k = \frac{1}{2}(A^{-1}\nabla F_{X_k}) + R$ ce qui montre, par exemple par continuité de l'application linéaire en dimension finie $Y \mapsto A^{-1}Y$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = R.$$

Exercice 16 (Un principe du maximum)

Soient $n \geq 1$ un entier, Ω la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 et $\partial\Omega$ désigne la sphère de centre 0 et de rayon 1. On considère des réels $b_1, \dots, b_n$ ainsi qu'une matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, symétrique et positive (c'est à dire telle pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on ait ${}^tXAX \geq 0$). On considère une application continue $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est de classe C^2 sur Ω . On pose, pour x dans Ω :

$$L_u(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Le but de l'exercice est de montrer la variante simplifiée suivante du principe du maximum : si $L_u(x) \geq 0$ pour tout x dans Ω alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur $\partial\Omega$.

1. Démontrer que l'un des coefficients diagonaux de A est non nul.
2. Si B et C sont deux matrices symétriques positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que $\text{tr}(BC) \geq 0$.
3. On suppose ici que le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ (on justifiera l'existence de ce maximum) est atteint en un point a de Ω . Démontrer que $L_u(a) \leq 0$.
4. On suppose ici que $L_u(x) \geq 0$ pour tout x dans Ω . Conclure en considérant une fonction v définie sur $\overline{\Omega}$ de la forme :

$$v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Omega}$, $\varepsilon > 0$, λ est choisi convenablement de sorte que $L_u(x) \leq L_v(x)$ et i est un entier de $\{1, \dots, n\}$ tel que $a_{i,i} > 0$.

5. En déduire que le problème suivant $\begin{cases} L_u(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \Omega \\ u(y) = f(y) & \text{pour tout } y \in \partial\Omega \end{cases}$, où $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, admet au plus une solution $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, continue qui est C^2 sur Ω .

1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable et, comme elle est positive, ses valeurs propres sont positives. Supposons un instant que sa trace soit nulle ; dans ce cas toutes ses valeurs propres sont nulles, donc A est nulle puisque semblable à la matrice nulle. Ainsi $\text{tr}(A) > 0$: il existe un élément diagonal de A qui est strictement positif.
2. Il existe une matrice $\sqrt{C}$ symétrique et positive telle que $(\sqrt{C})^2 = C$ (c'est classique, en ortho-diagonalisant C). On a alors :

$$\text{tr}(BC) = \text{tr}(\sqrt{C}B\sqrt{C}) \geq 0,$$

puisque $\sqrt{C}B\sqrt{C}$ est une matrice symétrique positive.

3. La fonction u est C^2 , donc continue, sur le fermé borné $\overline{\Omega}$: elle y atteint donc son maximum en (au moins) un point $a \in \overline{\Omega}$. Si $a \in \Omega$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, comme u est C^2 , on a $\nabla u(a) = 0$ et la forme quadratique q_a associée à la hessienne $\nabla^2 u(a)$ est négative, i.e. pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq 0.$$

Il vient alors

$$L_u(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \sum_{i=1}^n b_i \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}(a)}_{=0} = \text{tr}(A\nabla^2 u(a)).$$

Or la matrice $-\nabla^2 u(a)$ est symétrique positive : on a donc $\text{tr}(-A\nabla^2 u(a)) \geq 0$, selon la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{L_u(a) \leq 0}.$$

Commentaire. On vient de démontrer que, si $L_u(x) > 0$ pour tout x dans Ω , alors u atteint son maximum sur le bord $\partial\Omega$ et non à l'intérieur.

4. Soit v une fonction définie sur $\overline{\Omega}$ de la forme :

$$v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i}.$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Omega}$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et i est un entier de $\{1, \dots, n\}$ tel que $a_{i,i} > 0$. Cette fonction est de classe C^2 . De plus, l'opérateur $u \mapsto L_u$ est clairement linéaire. On a donc, pour tout x dans Ω :

$$L_v(x) = L_u(x) + \varepsilon e^{-\lambda x_i} (a_{i,i} \lambda^2 + b_i \lambda).$$

On choisit alors λ de sorte que $a_{i,i} \lambda^2 + b_i \lambda > 0$. Il vient ainsi :

$$L_v(x) > L_u(x) \geq 0.$$

La fonction v atteint alors son maximum sur $\partial\Omega$, selon la question précédente. Il existe donc $y_\varepsilon \in \partial\Omega$ tel que, pour tout x dans $\overline{\Omega}$, on a ait :

$$u(y_\varepsilon) + \varepsilon e^{\lambda y_i} \geq u(x) + \varepsilon e^\lambda > u(x),$$

où y_i est la i -ème coordonnées de y_ε . Comme $\partial\Omega$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante C telle que $\lambda x_i \leq C$ pour tout x dans $\partial\Omega$. Ainsi, pour tout x dans $\overline{\Omega}$:

$$u(x) < u(y_\varepsilon) + \varepsilon e^C \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon e^C.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$, inégalité vraie pour tout x dans $\overline{\Omega}$.

Conclusion. Si $L_u(x) \geq 0$ pour tout x dans Ω alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur $\partial\Omega$.

5. Si u et v sont deux solutions du problème proposé qui sont continue sur $\overline{\Omega}$ et C^2 sur Ω , on a : $L_{u-v}(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $u - v = 0$ sur $\partial\Omega$. La question précédente permet d'affirmer que $u - v \leq 0$ sur $\overline{\Omega}$. Mais on a de même $v - u \leq 0$: il en résulte que $u - v = 0$ sur $\overline{\Omega}$. $\square$