Feuille d'exercices n° 15. Calcul différentiel

Exercice 1
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tell que $\gamma(t) \neq 0$ pour tout t dans I.

1. On pose pour $t \in I$: $f(t) = \dfrac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$. Démontrer que pour tout t dans I, $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$.
2. Déterminer les arcs paramétrées $c : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ne passant pas par l'origine, tels que pour tout $t \in I$ la famille $(c(t), c'(t))$ soit liée.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - y)\mathrm{e}^{x-y}$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Etudier les extrema locaux de f.

Exercice 3
Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'équation $F(x, y) = 0$ d'inconnue y dans $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer et tracer l'allure de la ligne de niveau 0 de F.
3. Déterminer les points critiques de F.
4. L'application F présente-t-elle des extrema locaux ?
5. Montrer que la restriction de F à toute droite passant par l'origine $O = (0, 0)$ admet un minimum strict en O.
6. La fonction F admet-elle des extrema globaux ?

Exercice 4
Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(v) = \frac{1}{2}{}^tXAX + {}^tUX,$$

où X est la colonne de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que f est de classe C^1.
2. Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, non nul, on a ${}^tXAX > 0$.
3. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction f.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2(1 - x^2) + y^2(1 - y^2) + 2xy$.

1. a) Déterminer le gradient $\nabla f(x, y)$ de f au point courant (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
   b) Déterminer les extrema locaux de f.
2. a) Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $x^4 + y^4 \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.
   En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(x, y) \leqslant 2(x^2 + y^2) - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$.
   b) Déterminer les extrema globaux de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = 2t - \dfrac{t^2}{2}$.
   c) En déduire que f n'est pas minorée et admet un maximum global (on précisera le(s) point(s) où ce maximum est atteint et la valeur de ce maximum).

Exercice 6
Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{3-x} + \mathrm{e}^{3-y}$.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2 - tx + 2y)^2 \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$. Étudier les extrema de f.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

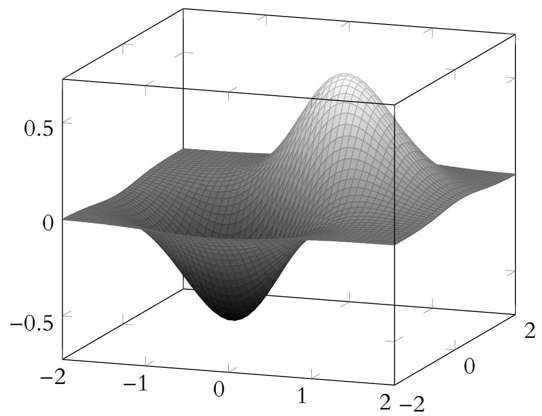
1. Étudier les extrema locaux de la fonction f.
2. Démontrer que si $|x| + |y| \geqslant 4$ alors $f(x,y) \geqslant 0$.
3. Déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 9
Soit $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Etudier les extrema de f.

Exercice 10
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

1. Diagonaliser la matrice J_n.
2. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer que f_n possède deux points critiques $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1,1,\dots,1)$ et $b = -a$.
4. Déterminer les extrema locaux de f_n.
5. a) Etudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$.
   b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :
   $$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
   c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.
6. Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Exercice 11
Soient $n \geqslant 1$ entier, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et α réel. On dit que f est *positivement homogène de degré* α $(ph - \alpha)$ lorsque pour tout $t > 0$ réel et m dans $\mathbb{R}^n$ on a : $f(tm) = t^\alpha f(m)$.

1. Donner des exemples de cette notion.
2. On suppose que f est de classe C^1. Démontrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler :
   $$\langle \nabla f(m), m \rangle = \alpha f(m) \ \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}^n.$$
3. On suppose que $n = 2$ et que f est C^2. On définit g dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ en posant pour $m = (x,y)$:
   $$g(m) = x\frac{\partial f}{\partial x}(m) + y\frac{\partial f}{\partial y}(m).$$
   a. Démontrer que si $\Delta f = 0$ alors $\Delta g = 0$.

b. Y-a-t-il réciproque ?

Exercice 12

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $F(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x\partial_1 F(x,y) + y\partial_2 F(x,y) = 0.$$

Démontrer que $F = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.
   a. Calculer les dérivées partielles $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   b. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$(\spadesuit) \quad g(0,0) = 0 \;\text{ et pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x\partial_1 g(x,y) + y\partial_2 g(x,y) = f(x,y)$$

Exercice 13 (Réduction des matrices symétriques réelles)
Soit $n \geqslant 1$ est entier naturel. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. La norme associée est notée $\|\ \|$. La sphère unité de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire l'ensemble des vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|v\| = 1$, est notée S^{n-1}.

1. Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\ker\beta \subset \ker\alpha$. Démontrer qu'il existe λ réel vérifiant : $\alpha = \lambda\beta$.
2. Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout t dans $]-1,1[$ on ait :

$$\|\gamma(t)\| = 1.$$

Démontrer que, pour tout t dans $]-1,1[$, on a : $\langle\gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$.

3. Soit $m \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|m\| = 1$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$, non nul, orthogonal à m. Démontrer qu'il existe une application $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, telle que $\gamma(0) = m$, $\gamma'(0) = v$ et, pour tout t dans $]-1,1[$, on ait

$$\|\gamma(t)\| = 1.$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et g sa restriction à S^{n-1}.
   a. Justifier que g admet des extrema globaux sur S^{n-1}.
   b. En considérant une application $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$ telle qu'à la question précédente, démontrer que, si g admet en m un extremum relatif, alors il existe λ réel vérifiant :

$$\nabla f(m) = \lambda m.$$

5. Soit A une matrice symétrique réelle, que l'on confond avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle.$$

   a. Démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = 2Ax$.
   b. Soit x un extremum de g, restriction de f à S^{n-1}. Démontrer que x est un vecteur propre de A.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est *convexe* lorsque pour tout m et p dans $\mathbb{R}^n$ et t dans $[0,1]$ on a : $f((1-t)m+tp) \leqslant (1-t)f(m) + tf(p)$.

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1, $\inf(f_1, f_2)$, $\sup(f_1, f_2)$?
   b) Lorsque $n = 1$, a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?
2. Démontrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(m,p) \in (\mathbb{R}^n)^2$ on a :

$$f(p) - f(m) \geqslant \langle\nabla f(m), p - m\rangle$$

3. On suppose que f est convexe. Si m_0 est un point critique de f, démontrer que f admet en m_0 un minimum global.
4. Dans cette question A est une matrice symétrique réelle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est définie par :

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle$$

   a) Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
   b) En déduire que si f est convexe, toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice 15
Soit n un entier, tel que $n \geq 2$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$, de la norme associée notée $\|\ \|$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée, on considère $B \in \mathbb{R}^n$, et on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(X) = {}^tXAX \quad \text{et} \quad F(X) = \Phi(X) - 2\ {}^tBX.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha \|X\|^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \beta \|X\|^2 .$$

2. a) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$F(X+H) = F(X) + \langle \nabla F(X), H\rangle + \Phi(H).$$

   b) Expliciter $F(X)$ pour $X \in \mathbb{R}^n$, à l'aides des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de X et des coefficients de la matrice A et du vecteur B. Justifier que F est de classe C^2.
   c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que $\nabla F(X) = 2(AX - B)$.
   d) Démontrer que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?

Dans la suite, on note R le point de $\mathbb{R}^n$ où F atteint son minimum.

3. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq R$.
   En utilisant le résultat de la question 2a, déterminer la valeur de α réel qui minimise $F(X - \alpha\nabla F(X))$.
   Calculer ce minimum.

4. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit :
   — une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$
   — une suite (α_k) de réels

   en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F(X_k) \quad \text{et} \quad \alpha_k = \begin{cases} \dfrac{||\nabla F(X_k)||^2}{2\Phi(\nabla F(X_k))} & \text{si } X_k \neq R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de α_k et de $\nabla F(X_k)$ et montrer que la suite $(F(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
   b) Étudier la convergence la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16 (Un principe du maximum)
Soient $n \geqslant 1$ un entier, Ω la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 et $\partial\Omega$ désigne la sphère de centre 0 et de rayon 1. On considère des réels $b_1, \ldots, b_n$ ainsi qu'une matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, symétrique et positive (c'est à dire telle pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on ait ${}^tXAX \geqslant 0$).
On considère une application continue $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, qui est de classe C^2 sur Ω. On pose, pour x dans Ω :

$$L_u(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Le but de l'exercice est de montrer la variante simplifiée suivante du principe du maximum : *si $L_u(x) \geqslant 0$ pour tout x dans Ω alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur $\partial\Omega$.*

1. Démontrer que l'un des coefficients diagonaux de A est non nul.
2. Si B et C sont deux matrices symétriques positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que $\operatorname{tr}(BC) \geqslant 0$.
3. On suppose ici que le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ (on justifiera l'existence de ce maximum) est atteint en un point a de Ω. Démontrer que $L_u(a) \leqslant 0$.
4. On suppose ici que $L_u(x) \geqslant 0$ pour tout x dans Ω. Conclure en considérant une fonction v définie sur $\overline{\Omega}$ de la forme :

$$v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_i}$$

   où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}$, $\varepsilon > 0$, λ est choisi convenablement de sorte que $L_u(x) \leqslant L_v(x)$ et i est un entier de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i,i} > 0$.
5. En déduire que le problème suivant $\begin{cases} L_u(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \Omega \\ u(y) = f(y) & \text{pour tout } y \in \partial\Omega \end{cases}$, où $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, admet au plus une solution $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, continue qui est C^2 sur Ω.