

Feuille d'exercices n° 14. Topologie des espaces vectoriels normés

Quelques corrections

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $\mathcal{O}$ un ouvert de E .
Montrer que $A + \mathcal{O} = \{a + x \mid (a, x) \in A \times \mathcal{O}\}$ est un ouvert de E .

Pour $a \in E$, notons $L_a : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$L_a(x) = a + x.$$

Chaque L_a est un homéomorphisme (application bijective continue dont la réciproque est continue) de E donc (caractérisation globale de la continuité) $L_a(\mathcal{O})$ est un ouvert de E pour tout a dans E . Mais on a :

$$A + \mathcal{O} = \bigcup_{a \in A} L_a(\mathcal{O})$$

et une union quelconque d'ouverts de E est encore un ouvert de E .

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est-il d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^2$?

Bien sûr que non : dans le cas contraire, si $(x, f(x))$ est un point intérieur au graphe de f , x aurait une infinité d'images par f ...

Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $\omega = \{(x, y) \in E^2 \mid (x, y) \text{ est libre}\}$. Démontrer que ω est un ouvert de E^2 .

• **Cas $n = 2$.** Si can est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et si $M = [(x, y)]_{can} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne la matrice de (x, y) dans can , (x, y) est libre si et seulement si M est inversible. Ainsi

$$\omega = f^{-1}(\mathbb{R}^*),$$

où $f : (x, y) \mapsto \det[(x, y)]_{can}$ qui est continue (car polynomiale).

• **Cas $n \geq 2$.** On note encore can la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M = [(x, y)]_{can} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ la matrice de la famille (x, y) dans can . La famille (x, y) est libre si et seulement si M est de rang 2.

Considérons $\mathcal{E}_{(x,y)}$ l'ensemble des déterminants mineurs d'ordre 2 de la matrice M . On a alors M de rang 2 si et seulement si il existe $m \in \mathcal{E}_{(x,y)}$ tel que $m \neq 0$.

On considère alors l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (x, y) associe

$$\varphi(x, y) = \sum_{m \in \mathcal{E}_{(x,y)}} m^2.$$

Cette application φ est polynomiale donc continue et $\omega = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$. □

Autre méthode : utiliser le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz...

Exercice 5 (Propriétés topologiques de $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$)

1. Démontrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe dont l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide. Montrer que $E = F$.

Comme F est d'intérieur non vide, il existe $x \in F$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset F$. Ainsi $B(0, r) = B(x, r) - x \subset F$. Puis, pour tout λ réel $B(0, \lambda r) = \lambda B(0, r)$ est dans F : cela impose $F = E$. □

Exercice 7

Soient ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles telles que la série $\sum a_n$ converge absolument et $E = \ell^2$ l'espace vectoriel des suites réelles telles que la série $\sum a_n^2$ converge.

1. Démontrer que $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E . Dans la suite, on munira E de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ associée à ce produit scalaire
2. Démontrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.
3. Trouver l'intérieur et l'adhérence de ℓ^1 dans ℓ^2 .

1. • Tout d'abord, pour u et v dans ℓ^2 la série de réels $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est absolument convergente donc est convergente, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est correctement définie.

- Fixons w dans ℓ^2 . Soient u, v dans ℓ^2 et λ réel. On a alors correctement :

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda v, w \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + \lambda v_n) w_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n w_n + \lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n w_n \quad \text{car les séries envisagées sont convergentes} \\ &= \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire de sa première entrée.

- Le produit dans $\mathbb{R}$ étant commutatif, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique : c'est donc une forme bilinéaire symétrique.

- Si u est dans ℓ^2 alors on a $\langle u, u \rangle = \sum_{n \geq 0} u_n^2 \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0$ implique que pour tout n entier naturel on a $u_n^2 = 0$ donc $u = 0$: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive ; c'est un produit scalaire sur ℓ^2 .

- Soit $u \in \ell^1$. Alors la série $\sum |u_n|$ converge. Ainsi $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $0 \leq |u_n| \leq 1$ et alors

$$0 \leq u_n^2 \leq |u_n|.$$

Ainsi, par domination, la série $\sum u_n^2$ est convergente ce qui assure que $u \in \ell^2$.

2. • ℓ^1 est un sous-espace vectoriel de ℓ^2 (facile). Ainsi, si ℓ^1 admet un point intérieur, $\ell^1 = \ell^2$ d'après l'exercice ?? ce qui n'est pas le cas (pensez à la série harmonique).
- On a $\overline{\ell^1} = \ell^2$. En effet, prenons $u \in \ell^2$. On définit alors une suite (v^n) dans ℓ^1 en posant pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$v_n^p = \begin{cases} u_n & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout n dans N la suite v^n est bien un élément de ℓ puisque nulle à partir du rang $n+1$. Il est immédiat de vérifier que l'on a :

$$\|v^n - u\|_2 \xrightarrow{+\infty} 0,$$

ce qui assure que tout élément de ℓ^2 est limite d'une suite d'élément de ℓ^1 .

Exercice 8

Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, A et B des parties non vides. On pose : $\text{dist}(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\|$.

1. Justifier que $\text{dist}(A, B)$ est correctement défini.
2. On suppose que A et B sont des fermés de E et on suppose $\text{dist}(A, B) = 0$. A-t-on, $A \cap B \neq \emptyset$.

1. L'ensemble $\{\|a - b\| \mid (a, b) \in A \times B\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 : il admet donc une borne inférieure.

2. La réponse est non : prendre pour A l'axe des abscisses qui est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (comme sous-espace vectoriel en dimension finie) et pour B la partie du graphe de la fonction inverse f sur $]0, +\infty[$.
 Justifions que $B = \{(x, f(x)) \mid x > 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans B telle que $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{R}^2$.
 On peut écrire $\ell = (x, y)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (x_n, f(x_n))$. On a alors $x_n \xrightarrow{+\infty} x$ et par continuité de f : $f(x_n) \xrightarrow{+\infty} f(x)$. Mais on a aussi $f(x_n) \xrightarrow{+\infty} y$. Par unicité de la limite il vient $y = f(x)$ et ainsi $\ell \in B$.
 Par caractérisation séquentielle B est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E . On note $\bar{A}$ l'adhérence de A .

1. a) Donner la caractérisation séquentielle de $\bar{A}$.
 b) Prouver que, si A est convexe, alors $\bar{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

- a) Soit $x \in E$. Prouver que : $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.
- b) On suppose que A est fermée dans E et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y).$$

Prouver que A est convexe.

1. a) **Caractérisation séquentielle de l'adhérence.**

Soit x dans E . On a $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) dans A telle que $a_n \xrightarrow{+\infty} x$.

- b) Soient x et y dans $\bar{A}$ ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. Il existe alors deux suites (a_n) et (b_n) dans A telles que $a_n \xrightarrow{+\infty} x$ et $b_n \xrightarrow{+\infty} y$.

Par opérations sur les limites :

$$(1-\lambda)a_n + \lambda b_n \xrightarrow{+\infty} (1-\lambda)x + \lambda y.$$

Comme A est convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1-\lambda)a_n + \lambda b_n \in A$. Ainsi $(1-\lambda)x + \lambda y$ est limite d'une suite d'éléments de A donc est dans $\bar{A}$. Il en résulte que $\bar{A}$ est convexe.

2. a) On travaille par équivalence :

$$\begin{aligned} d_A(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B_o(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

- b) Soient x et y dans A ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. On a alors :

$$0 \leq d_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda d_A(x) + (1-\lambda)d_A(y).$$

Comme A est fermé dans E on a $\bar{A} = A$ et ainsi, d'après la question précédente, $d_A(x) = 0$ et $d_A(y) = 0$.
 On obtient donc $d_A(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0$ et ainsi :

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{A} = A.$$

Exercice 10

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. **Application :**

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car la suite $\left(\frac{1}{2^k}I_n\right)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ a pour limite la matrice nulle qui n'est pas dans $GL_n(\mathbb{R})$ (on a utilisé la caractérisation séquentielle des fermés).
2. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application déterminant, qui est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ (complémentaire du fermé $\{0\}$), donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. • Si le polynôme caractéristique χ_M possède une racine strictement positive, on note ρ la plus petite de ces racines (un tel minimum existe bien car l'ensemble des racines est fini) ; sinon on pose $\rho = 1$.
Ainsi, $\rho > 0$ et le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racine dans l'intervalle $]0, \rho[$, d'où :

$$\forall \lambda \in]0, \rho[, \quad \det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_M(\lambda) \neq 0 \quad \text{donc} \quad M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$$

- La suite $\left(M - \frac{\rho}{k}I_n\right)_{k \geq 2}$ est alors à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ et converge vers M ce qui montre que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Application.

- Si $B \in GL_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables car $AB = B^{-1}(BA)B$, donc elles ont le même polynôme caractéristique.

Ainsi, les applications φ_1 et φ_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définies pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi_1(M) = \chi_{AM}$ et $\varphi_2(M) = \chi_{MA}$ sont égales sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Mais $M \mapsto AM$ est continue (car linéaire) sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, φ_1 est continue et $M \mapsto \chi_M$ est aussi continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base, car les coefficients du polynôme caractéristique de M sont polynomiaux en les coefficients de M . Par composition φ_1 est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il en va de même de φ_2 .

Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que φ_1 et φ_2 coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a en particulier $\varphi_1(B) = \varphi_1(B)$, ce qui démontre que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Un petit problème

Partie I

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme $r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\text{Id}_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1})$, où Id_E représente l'endomorphisme identité de E .

1. Soit $x \in \ker(u - \text{Id}_E)$.
 - a) Pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer $u^k(x)$.
 - b) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$.
2. Soit $x \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$. Démontrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$.
3. En déduire que $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.
4. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque.
 - a) Démontrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E , que l'on notera $p(x)$.
 - b) Interpréter géométriquement l'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie.

Partie II - Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 2$.

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

Définition 1 On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Définition 2 Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} \geq 0 ; \quad (1)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. \quad (2)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

1. Vérifier que la condition (2) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
3. Démontrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 9 à 16, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

5. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$, on Démontrer a que $x_j = x_s$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
6. En déduire que $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.
7. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
8. Démontrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , stochastique, de rang 1.
9. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
10. Démontrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
11. Démontrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
12. Démontrer que le réel 1 est valeur propre simple de A . On pourra utiliser le résultat de la question 3.

Partie 1 - Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. a) Si pour un certain $k \in \mathbb{N}$ on a $u^k(x) = x$ alors $u^{k+1}(x) = u(x) = x$. Comme $u^0(x) = x$ puisque $u^0 = \text{Id}_E$, on peut conclure par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u^k(x) = x$.
b) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $r_k(x) = x$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = x$.
2. Comme $x \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$, il existe y tel que $x = (u - \text{Id}_E)(y)$ i.e $x = u(y) - y$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $u^k(x) = u^{k+1}(x) - u^k(x)$.
Ceci amène (télescoping), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} (u^{\ell+1}(x) - u^\ell(x)) = \frac{1}{k} (u^k(x) - x).$$

On en déduit que $\|r_k(x)\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(x)\| + \|x\|)$, valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Or, u est 1-lipschitzienne :

$$\|u^k(x)\| \leq \|x\|$$

. Par sandwich on obtient : $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0$

3. Par théorème du rang, on a les bonnes dimensions. De plus, si $x \in \text{Im}(u - \text{Id}_E) \cap \ker(u - \text{Id}_E)$, $(r_k(x))$ est simultanément de limite x et 0_E et donc $x = 0_E$ par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à 0_E et la somme est directe.

Conclusion. $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$

4. a) Comme $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$, il existe $y \in \ker(u - \text{Id}_E)$ et $z \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ tels que $x = y + z$.
On a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z) \rightarrow y$. $x \mapsto y$ est la projection sur $\ker(u - \text{Id}_E)$ de direction $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$.

Conclusion. $r_k(x) \rightarrow p(x)$ avec p projection sur $\ker(u - \text{Id}_E)$ de direction $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$.

- b) C'est écrit ci-dessus.

Partie 2 - Matrices stochastiques

5. Posons $V = AU$. On a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $V_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$. Il en résulte que la condition (4) est équivalente à la condition $AU = U$.

6. Soient A, B dans $\mathcal{E}$. Par les formules du produit matriciel, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes ≥ 0). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.

Conclusion. $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

7. • Soit (A_k) une suite convergente de matrices dans $\mathcal{E}$, et A sa limite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Chaque coefficient de A est limite de la suite correspondante des coefficients de A_k et est positif comme limite de tels termes. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A_k U = U$, donc $AU = U$. Ainsi A est stochastique. **Conclusion.** Par caractérisation séquentielle, $\mathcal{E}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient A, B dans $\mathcal{E}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M . De plus $MU = \lambda AU + (1 - \lambda)BU = \lambda U + (1 - \lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique.

Conclusion. $\mathcal{E}$ est convexe.

8. Posons $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|x\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout i , on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$

9. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. La matrice B est stochastique (question 6) à coefficients > 0 . Soit $X \in \ker(B - I_n)$. On a $BX = X$.

Considérons un indice s tel que x_s est le maximum des x_i .

Comme $BX = X$ il vient :

$$x_s = \sum_{j=1}^n b_{s,j} x_j \leq x_s \sum_{j=1}^n b_{s,j} = x_s$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un indice j tel que $x_j < x_s$. Comme $b_{s,j} > 0$, l'inégalité ci-dessus devient stricte : $x_s < x_s$ et donc une contradiction.

Ceci montre que les x_j sont tous égaux et donc que $X \in \text{Vect}(U)$. Ainsi $\ker(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$. Mais A^p est une matrice stochastique (question 12) et on a donc $U \in \ker(A - I_p)$.

Conclusion. $\ker(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$ et donc $\dim(\ker(A^p - I_n)) = 1$

10. Comme A est stochastique on a : $\text{Vect}(U) \subset \ker(A - I_n)$. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$ pour tout k et en particulier $A^p X = X$. la question précédente montre que $X \in \text{Vect}(U)$ et ainsi $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.
11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les matrices A^ℓ pour $\ell \in \mathbb{N}$ sont toutes stochastiques (question 6). Ainsi R_k est donc à coefficients positifs comme somme de telles matrices. De plus

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} U = U.$$

et on a aussi (4). Ainsi R_k est une matrice stochastique.

12. La question 4 de la partie I et la question 8 montrent que (R_k) est convergente de limite P telle que $P^2 = P$. De plus, les questions 11 et 7 (caractère fermé) montrent que P est stochastique.

La partie 1 a montré que P est la matrice de la projection sur $\ker(A - I_n)$ de direction $\text{Im}(A - I_n)$. On a donc $\text{Im}(P) = \text{Vect}(U)$ et P est de rang 1.

Conclusion. La suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , stochastique, de rang 1.

13. Comme P est de rang 1, les lignes $L_1, \dots, L_n$ de P vérifient :

$$L_i = \lambda_i L_1$$

pour tout $i \in \{1, n \dots, n\}$ (noter que L_1 est non nulle).

Mais la somme des coefficients de chaque ligne est 1 : cela force $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in \{1, n \dots, n\}$ et ainsi toutes les lignes de P sont les mêmes.

Il en résulte que $P = UL$ avec $L = L_1$ qui est bien sûr stochastique puisque P l'est.

14. • Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$R_k A = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k A^l = \frac{1}{k} ((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $PA = P$

- La matrice P est une matrice dont toutes les lignes sont égales à L . PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA . L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.

Soit maintenant Y est une matrice ligne, $YA = Y$ s'écrit aussi ${}^tA{}^tY = {}^tY$ ou encore $({}^tA - I_n){}^tY = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n - 1$ (par théorème du rang) et il en est de même de ${}^tA - I_n$. Le noyau de ${}^tA - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice tL qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = Y$ sont les multiples de L . La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement

Conclusion. L est la seule ligne stochastique telle que $LA = L$.

15. On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$, alors en regardant le i -ème coefficient de $LA^p = L$, on aurait

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j (A^p)_{j,i}$$

Mais chaque coefficient $(A^p)_{j,i}$ est strictement positif et les λ_j sont positifs et non tous nuls, ceci est stupide.

Conclusion. L est à coefficients strictement positifs.

16. On sait que $\ker(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n$. Les espaces $F = \ker(A - I_n)$ et $G = \operatorname{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A . En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathbb{R}^n$,

$$\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$$

F est de dimension 1 et $u_F = \operatorname{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X - 1)$. Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \operatorname{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G} . De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u , c'est-à-dire que 1 est valeur propre simple de A .