Feuille d'exercices n° 14. Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $\mathcal{O}$ un ouvert de E .
 Montrer que $A + \mathcal{O} = \{a + x \mid (a, x) \in A \times \mathcal{O}\}$ est un ouvert de E .

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est-il d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $\omega = \{(x, y) \in E^2 \mid (x, y) \text{ est libre}\}$. Démontrer que ω est un ouvert de E^2 .

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé. Si F est un sous-espace de E montrer que $\overline{F}$ aussi.

Exercice 5 (Propriétés topologiques de $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$)

1. Démontrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un convexe fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe dont l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide. Montrer que $E = F$.

Exercice 7

Soient ℓ^1 l'espace vectoriel des suites réelles telles que la série $\sum a_n$ converge absolument et $E = \ell^2$ l'espace vectoriel des suites réelles telles que la série $\sum a_n^2$ converge.

1. Démontrer que $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E . Dans la suite, on munira E de la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ associée à ce produit scalaire
2. Démontrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.
3. Trouver l'intérieur et l'adhérence de ℓ^1 dans ℓ^2 .

Exercice 8

Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, A et B des parties non vides. On pose : $\text{dist}(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\|$.

1. Justifier que $\text{dist}(A, B)$ est correctement défini.
2. On suppose que A et B sont des fermés de E et on suppose $\text{dist}(A, B) = 0$. A-t-on, $A \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E . On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

1. a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
 b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
 a) Soit $x \in E$. Prouver que : $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
 b) On suppose que A est fermée dans E et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1 - t)y) \leq t d_A(x) + (1 - t) d_A(y).$$

Prouver que A est convexe.

Exercice 10

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. **Application :**

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Un petit problème

Partie I

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme $r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\text{Id}_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1})$, où Id_E représente l'endomorphisme identité de E .

1. Soit $x \in \ker(u - \text{Id}_E)$.
 - a) Pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer $u^k(x)$.
 - b) En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$.
2. Soit $x \in \text{Im}(u - \text{Id}_E)$. Démontrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$.
3. En déduire que $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.
4. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque.
 - a) Démontrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E , que l'on notera $p(x)$.
 - b) Interpréter géométriquement l'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie.

Partie II - Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 2$.

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

Définition 1 On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Définition 2 Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 ; \quad (1)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. \quad (2)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

1. Vérifier que la condition (2) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
3. Démontrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 5 à 12, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

5. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$, on démontre que $x_j = x_s$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
6. En déduire que $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.
7. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
8. Démontrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , stochastique, de rang 1.
9. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
10. Démontrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
11. Démontrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
12. Démontrer que le réel 1 est valeur propre simple de A . On pourra utiliser le résultat de la question 3.