Feuille d'exercices n° 13. Algèbre bilinéaire
Quelques corrections

Exercice 1
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$. Justifier que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 1, 1, -1)$ sur F.

On a $F = a^\perp$ où $a = (1, 1, 1, 1)$ donc F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, de dimension 3.
Notons π_F la projection orthogonale sur F. Comme :

$$u = \underbrace{\pi_F(u)}_{\in F} + \underbrace{u - \pi_F(u)}_{\in F^\perp}$$

le projeté orthogonal de u sur $F^\perp$ est $u - \pi_F(u)$.
Mais $F^\perp = \mathrm{vect}(a)$ donc : $u - \pi_F(u) = \langle u, a\rangle \dfrac{a}{\|a\|^2}$ (expression du projeté orthogonal en base orthonormale) et ainsi

$$\pi_F(u) = u - \langle u, a\rangle \frac{a}{\|a\|^2}$$

Mais $\langle u, a\rangle = 2$ et $\|a\|^2 = 4$ donc $\pi_F(u) = u - \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{2}(1, 1, 1, -3)$.

Exercice 2
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$\begin{cases} P_1 &= (X-1)(X-2)(X-4) \\ P_2 &= (X-1)(X-3)(X-4) \\ P_3 &= (X-2)(X-3)(X-4) \end{cases}$$

On pose $H = \mathrm{vect}(P_1, P_2, P_3)$.

1. Justifier que H est un hyperplan de E et trouver φ forme linéaire sur E telle que $H = \ker\varphi$. Cette forme linéaire φ est-elle unique ?
2. On considère le produit scalaire sur E défini par : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} P(k)Q(k)$. Soit $P \in E$. Trouver le projeté orthogonal de P sur H.

1. On a $H = \ker\delta_4$ où $\delta_4 : P \mapsto P(4)$ est une forme linéaire non nulle. Toute forme linéaire proportionnelle à δ_4, et non nulle, a encore pour noyau H.
2. Soit $P \in E$. Pour ce produit scalaire, H est l'orthogonal de la droite engendrée par $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$. Ainsi en notant π_H la projection orthogonale sur H, comme $P - \pi_H(P)$ est le projeté orthogonal de P sur $H^\perp = \mathrm{vect}(P_0)$, il vient :

$$P - \pi_H(P) = \langle P, P_0\rangle \frac{P_0}{\|P_0\|^2} = \frac{P(4)}{\|P_0\|^2} P_0$$

Enfin $\|P_0\|^2 = P_0(4)^2$ d'où :

$$\Pi_H(P) = P - \frac{P(4)}{P_0(4)^4} P_0$$

Au passage on a (théorème de minimisation) :

$$\mathrm{dist}(P, H) = \|P - \pi_H(P)\| = \frac{|P(4)|}{12}.$$

Exercice 3
On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application de E^2 dans E définie par : $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} p_i q_i$ où on a écrit : $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i X^i$...

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{P \in E | P(1) = 0\}$. Déterminer $\mathrm{dist}(1, F)$.

Exercice 4 (Matrices de Gram)
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace pré-hilbertien réel et $\theta = (a_1, \dots, a_n)$ une famille dans E. On considère la matrice $G_\theta = [\langle a_i, a_j\rangle] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que G_θ est inversible si et seulement si θ est une famille libre.
2. On suppose que la famille θ est libre et on pose $F = \mathrm{vect}(\theta)$. Soit $x \in E$. On note θ' la famille $(a_1, \dots, a_n, x)$. Démontrer que :
$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G_{\theta'}}{\det G_\theta}}.$$

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \geqslant 1)$.

1. Démontrer que $\left(\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) \end{array}\right)$ est un produit scalaire sur E.
2. On considère $\beta = (L_0, \dots, L_n)$ où L_i est l'interpolateur de Lagrange élémentaire tel que $L_i(j) = \delta_i^j$ pour $(i,j) \in \{0, \dots, n\}^2$. Démontrer que β est une base orthonormée de E.
3. Si P est dans E, donner les composantes de P dans β.

Exercice 6
Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Pour k dans $\{0, \dots, n\}$ et x réel on pose : $f_k(x) = \cos kx$ et $g_k(x) = \sin kx$.
On pose encore $F = \mathrm{vect}(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $G = \mathrm{vect}(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Démontrer que F et G sont des sous-espaces orthogonaux de E.
3. On note A la partie de E formée des fonctions positives. Déterminer $A^\perp$.

Exercice 7
Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. On considère la propriété $\mathcal{P}$ suivante : « Pour tout $(x,y) \in S^2$ avec $x \neq y$ et $t \in]0,1[$ on a $tx + (1-t)y \notin S$ ».

1. Illustrer graphiquement la propriété $\mathcal{P}$ dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
2. Démontrer que $\mathcal{P}$ est vraie dans le cas général.

1. Dans ce cas S est la sphère de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1. Puis $tx + (1-t)y$ pour $t \in [0,1]$ est une paramétrisation du segment $[x,y]$. En, enlevant $t = 0$ et $t = 1$ on enlève les extrémités du segment. La propriété $\mathcal{P}$ semble vérifiée graphiquement (faire un dessin !).
2. Soient $(x,y) \in S^2$ avec $x \neq y$. On considère tout à fait par hasard la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie, pour $t \in [0,1]$, par :
$$\begin{aligned} f(t) &= \|tx + (1-t)y\|^2 = t^2 \underbrace{\|x\|^2}_{=1} + (1-t)^2 \underbrace{\|y\|^2}_{=1} + 2t(1-t)\langle x, y\rangle \\ &= 2t^2(1 - \langle x,y\rangle) + 2t(\langle x,y\rangle - 1) + * \end{aligned}$$
Comme $x \neq y$ on a : $0 < \|x - y\|^2 = 2 - 2\langle x,y\rangle$ de sorte que $(1 - \langle x,y\rangle) > 0$. La fonction f est donc un trinôme du second degré à coefficient dominant strictement positif qui vérifie $f(0) = f(1) = 1$: pour tout $t \in]0,1[$ on a $f(t) < 1$ ce qui prouve la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 8 (Le théorème de représentation de Riesz)
Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Pour $a \in E$ on considère l'application $f_a : E \to \mathbb{R}$ définie, pour x dans E, par $f_a(x) = \langle a, x\rangle$.

1. Justifier que f_a est linéaire et donner son noyau.
2. Démontrer que l'application $f = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}\right)$ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ il existe un unique $a \in E$ tel que :
$$(\forall x \in E)\,(\varphi(x) = \langle a, x\rangle).$$

*Ce dernier résultat est le **théorème de représentation de Riesz** : toute forme linéaire sur un espace euclidien « est représentée par un unique élément a de E à l'aide du produit scalaire ».*

4. **Une application** : le dual de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$. Dans cette question E est l'espace $\mathcal{M}_n(R)$. Démontrer que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ alors il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ telle que :

$$(\forall M \in E)\,(\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)).$$

1. Par bilinéarité du produit scalaire, f_a est linéaire et son noyau est l'hyperplan $(\mathrm{vect}(a)) \perp$.
2. • Soient a, b dans E et λ dans $\mathrm{I\!R}$. Pour tout x dans E on a :

$$\begin{aligned} f(a+\lambda b)(x) &= \langle a+\lambda b, x\rangle = \langle a, x\rangle + \lambda \langle b, x\rangle \\ &= f(a)(x) + \lambda f(b)(x) \end{aligned}$$

Ceci étant valable quelque soit le choix de x dans E, il vient : $f(a+\lambda b) = f(a) + \lambda f(b)$.

• Soit $a \in \ker \Phi$. L'application f_a est alors nulle, donc $a = 0_E$ et ainsi $\ker f = \{0_E\}$.

• L'application linéaire f est injective de E dans E^* qui sont des espaces vectoriels de même dimension : f est bijective (par le théorème du rang) et c'est donc un isomorphisme de E sur E^*.
3. Comme Φ est une application bijective de E sur E^*, pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$ et ainsi :
$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle\,.$$
4. **Une application**
On munit $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R}) \to \mathrm{I\!R}$ une forme linéaire. D'après la question 3, il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ on ait :

$$\varphi(M) = \langle B, M\rangle = \mathrm{tr}({}^tBM).$$

On pose alors $A = {}^tB$ pour obtenir le résultat.

Exercice 9
Soit E un espace pré-hilbertien réel. Soit $\beta = (e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E telle que pour tout x dans E : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$.
Montrer que β est une base orthonormale de E.

• Soit $F = \mathrm{vec}_{\mathrm{I\!R}}(\beta)$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension n de E. Si $y \in F^\perp$ on a :

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle^2 = 0$$

donc $F^\perp = 0$. Or F est de dimension finie donc

$$E = F \oplus F^\perp$$

et ainsi E est de dimension finie n donc β est une base de E.

• Pour $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle\,. \end{aligned}$$

En particulier on a pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k\rangle \langle e_j, e_k\rangle\,.$$

Il en résulte que si $G = [\langle e_i, e_j\rangle]$ alors on a $G = G^2$ et comme G est inversible (puisque β est libre) alors $G = 1_n$ ce qui prouve le résultat demandé.

Exercice 10
Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i) p est un projecteur orthogonal ;

(ii) Pour tout x dans E on a : $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

• On note $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$. Comme p est un projecteur on a

$$E = F \oplus G.$$

• Supposons que p soit un projecteur orthogonal. On a alors $G = F^{\perp}$. Si $x \in E$ on écrit alors $x = f + g$ selon la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$ et on a alors :

$$\|x\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \geqslant \|f\|^2 = \|p(x)\|^2 .$$

• On suppose maintenant que pour tout $x \in E$ on a $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
On raisonne alors par l'absurde et on suppose que $G \neq F^{\perp}$. Il existe alors $f \in F$ et $g \in G$ tels que :

$$\langle f, g\rangle \neq 0.$$

Pour λ réel $x_\lambda = f + \lambda g$. On a alors :

$$\|x_\lambda\|^2 \geqslant \|p(x_\lambda)\|^2 \quad \text{i.e.} \quad \|f\|^2 + \lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda \langle f, g\rangle \geqslant \|f\|^2$$

ce qui amène $\lambda^2 \|g\|^2 + 2\lambda \langle f, g\rangle \geqslant 0$, valable pour tout λ réel, et on obtient donc une contradiction.

Exercice 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\ ,\ \rangle$ est est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   a) Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E
   b) Prouver que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   c) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.
   d) Soit $A \in E$. Déterminer en fonction des coefficients de A la distance $\operatorname{dist}(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^{\perp}$.

1. • Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$(M \mid N) = \operatorname{tr}({}^tMN) = \operatorname{tr}({}^t({}^tMN)) = \operatorname{tr}({}^tNM) = (N \mid M).$$

Fixons M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ réel on a :

$$\begin{aligned}
\langle M, A + \lambda B\rangle &= \operatorname{tr}({}^tM(A + \lambda B)) \\
&= \operatorname{tr}({}^tMA + \lambda {}^tMB) \\
&= \operatorname{tr}({}^tMA) + \lambda \operatorname{tr}({}^tMB) \quad \text{(par linéarité de la trace)} \\
&= \langle M, A\rangle + \lambda \langle M, B\rangle
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\langle\ ,\ \rangle$ est une **forme bilinéaire symétrique** sur E.

• Puis si $M \in E$ avec $M = [m_{i,j}]$ on a : $\langle M, M\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 \geqslant 0$ et si $\langle M, M\rangle = 0$ alors pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on a $m_{k,i}^2 = 0$ donc $M = 0$: $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E qui est **définie positive** ; $\boxed{\langle\ ,\ \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2. a) On a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \ker \varphi$ où φ est l'endomorphisme de E défini par $\varphi(M) = M - {}^tM$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \ker \psi$ où φ est l'endomorphisme de E défini par $\psi(M) = M + {}^tM$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

   b) • Prenons $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}(AB) \quad \text{et} \quad \langle B, A\rangle = \operatorname{tr}({}^tBA) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(AB)$$

   Par symétrie du produit scalaire on a donc : $\operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}(AB)$ i.e. $\operatorname{tr}(AB) = 0$ et ainsi $\langle A, B\rangle = 0$.
   Il en résulte que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux donc en somme directe.

   • Pour tout M dans E on a :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \quad (\spadesuit)$$

   ce qui assure que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Conclusion. $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

c) Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux on a $A_n(\mathbb{R})^\perp \subset S_n(\mathbb{R})$. De plus, $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases} \dim E = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ \dim E = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp \end{cases}$$

Ainsi $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on peut conclure que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

d) Selon le théorème de minimisation (on travaille en dimension finie !), si π désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - \pi(A)\|.$$

Selon la décomposition (♠), on a $A - \pi(A) = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ et ainsi :

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\left\|A - {}^tA\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2}.$$

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On écrit $M = D + (M - D)$ où D est la matrice dont la diagonale est celle de M avec des 0 partout ailleurs. Comme $D \in F$ et $(M - D) \in F^\perp$ on a la décomposition (par unicité) de M selon $E = F \oplus F^\perp$. Il en résulte que $F^\perp$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle.

Exercice 12
Soit $\Omega = [\omega_{ij}]$ dans $O_n(\mathbb{R})$. Borner de manière optimale $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}$.

La matrice Ω est une matrice de passage entre base orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On dispose donc de deux bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\omega_{ij} = \langle e_i, \varepsilon_j \rangle.$$

On a alors par bilinéarité du produit scalaire :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle e_i, \varepsilon_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i, \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j \right\rangle.$$

Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| \left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\right\|$$

Mais on a $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2 = n$ et de même $\displaystyle\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\right\| = \sqrt{n}$. On obtient donc en définitif :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\right| \leqslant n$$

cette inégalité étant optimale comme le montre le cas de $\Omega = 1_n$.

Exercice 13
Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à

$$F = \{(x_1, \ldots, x_,) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Exercice 14
Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme symétrique défini positif de E. Démontrer que pour tout x, y dans E on a :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \left\langle y, f^{-1}(y)\right\rangle.$$

On considère $(x,y) \mapsto \langle f(x), y\rangle$ qui est un produit scalaire sur E puisque f est symétrique défini positif. On écrit alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire : pour tout x et y dans E on a

$$|\langle x, f(y)\rangle|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \langle f(y), y\rangle .$$

Si maintenant x et z sont dans E, comme f est un isomorphisme, il existe alors un unique $y \in E$ tel que $y = f^{-1}(z)$ et en remplaçant y dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$|\langle x, z\rangle|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \left\langle z, f^{-1}(y)\right\rangle$$

ce qui est bien l'inégalité demandée.

Exercice 15
Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

Exercice 16
Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme symétrique défini positif de E. Démontrer que pour tout x, y dans E on a :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \left\langle y, f^{-1}(y)\right\rangle .$$

Exercice 17
Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme symétrique positif de E.

1. Pour λ réel et $x \in E$, calculer $\langle f(x+\lambda f(x)), x+\lambda f(x)\rangle$.
2. En déduire que pour tout x dans E on a : $\|f(x)\|^4 \leqslant \langle f(x), x\rangle \left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle$.

Soit x dans E. Pour tout μ réel on calcule :

$$\begin{aligned}
\langle f(x+\mu f(x)), x+\mu f(x)\rangle &= \mu^2 \left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle + \mu\left(\left\langle f^2(x), x\right\rangle + \|f(x)\|^2\right) + \langle f(x), x\rangle \\
&= \mu^2 \left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle + \mu\left(\langle f(x), f(x)\rangle + \|f(x)\|^2\right) + \langle f(x), x\rangle \\
&= \mu^2 \left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle + 2\mu \|f(x)\|^2 + \langle f(x), x\rangle
\end{aligned}$$

Comme f est positive, en supposant $\left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle \neq 0$, on a un trinôme du second degré en μ qui est toujours positif. On a alors $\Delta' \leqslant 0$ et ainsi :

$$\|f(x)\|^4 - \left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle \langle f(x), x\rangle \leqslant 0$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

Si maintenant $\left\langle f^2(x), f(x)\right\rangle = 0$, il reste $2\mu \|f(x)\|^2 + \langle f(x), x\rangle \geqslant 0$ et ce pour tout μ réel, ce qui n'est possible que lorsque $\|f(x)\| = 0$, cas dans lequel l'inégalité demandée est triviale.

Commentaire. On a utilisé ici une « preuve variationnelle », comme dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 18
Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit orthogonale.

On considère $u = f^* \circ f$, où f^* est l'adjoint de f. L'endomorphisme u est symétrique : il existe donc une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E de vecteurs propres de u.
Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, appelons λ_i la valeur propre de u associée au vecteur propre e_i. Pour $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on a alors :

$$\begin{aligned}
\langle f(e_i), f(e_j)\rangle &= \langle f^* \circ f(e_i), e_j\rangle \\
&= \langle u(e_i), e_j\rangle = \lambda_i \langle (e_i), e_j\rangle \\
&= \delta_i^j \lambda_i
\end{aligned}$$

La base $(e_1, \ldots, e_n)$ convient donc.

Exercice 19
Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Exercice 20 (CCP)
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t \right) X^k$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\ker \Phi$.
2. Écrire la matrice M de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier que M est diagonalisable.
3. Soit $U = {}^t(u_0, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tUMU = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} u_k t^k \right)^2 \mathrm{d}t$. En déduire que toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.
4. Montrer que la plus petite valeur propre de M tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Exercice 21
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ une base orthonormale de E.

1. **L'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E**
   Dans cette question u désigné un endomorphisme de E. On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :
   $$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$
   a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E : $u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$.
   b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.
   c) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question 1a est effectivement un endomorphisme de E.
   d) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$
2. **Endomorphismes normaux**
   Soit u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :
   $$u \circ u^\star = u^\star \circ u$$
   a) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

   Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

   b) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star)$.
   c) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.
   d) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par $u^\star$ et en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

1. a) Supposons que $u^\star$ existe. Soit y dans E. On a, puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E :
   $$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u^\star(y), e_i\rangle\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle y, u(e_i)\rangle\, e_i,$$
   ce qui donne le résultat souhaité par symétrie du produit scalaire :
   $$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$
   b) Supposons que $u^\star$ existe. D'après la question précédente, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a :
   $$u^\star(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), e_j\rangle\, e_i.$$
   La matrice de $u^\star$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $B = \big[\, \langle u(e_i), e_j\rangle \,\big]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ce qui prouve l'unicité de $u^\star$. On peut noter que $B = {}^tA$ où A est la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
   c) Posons pour tout y dans E :
   $$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$
   Pour tout y dans E, $u^\star(y)$ est bien un élément de E et par linéarité du second argument du produit scalaire, $u^\star$ est bien linéaire (l'écrire pour le correcteur EDHEC).

d) L'application $u^\star$ définie à la question précédente est bien un endomorphisme de E comme on vient de le voir. En reprenant les notations introduites dans la question 1b, sa matrice dans $\mathcal{B}$ n'est autre que ${}^tA$ où A est la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
Prenons maintenant x et y dans E et notons X et Y les colonnes respectives de x et y dans $\mathcal{B}$. L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée donne :

$$\langle u(x), y\rangle = \underbrace{{}^tY(AX)}_{\in \mathbb{R}} = {}^t({}^tYAX) = {}^tX({}^tAY) = \langle x, u^\star(y)\rangle \,.$$

Enfin on a démontré l'unicité de $u^\star$ à la question précédente (1b).

2. a) • Par unicité de $f^\star$, comme f est symétrique $f = f^\star$.

• Comme $f^2 = f^2$ (et oui !!!!!!), f est un endomorphisme normal de E.

b) • Soit $x \in E$. On a alors :

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u \star \circ u(x)\rangle = \langle x, u \circ u^\star(x)\rangle = \langle u^\star(x), u^\star(x)\rangle = \|u^\star(x)\|^2 \,.$$

Ainsi : $\|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

• Soit x dans E. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \ker u &\Leftrightarrow u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u^\star(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow u^\star(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u^\star \end{aligned}$$

Il en résulte que $\ker u = \ker u^\star$.

c) Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Soit $u \in F^\perp$. On veut montrer que $u^\star(x) \in F^\perp$.
Pour tout y dans F, comme $u(y) \in F$, on a :

$$0 = \langle u(y), y\rangle = \langle y, u^\star(x)\rangle \,.$$

Il en résulte que $u^\star(x) \in F^\perp$.

Conclusion. $F^\perp$ est $u^\star$-stable.

d) Soit $x \in E_\lambda$. On a donc $u(x) = \lambda x$. On a ainsi :

$$u(u^\star(x)) - \lambda u^\star(x) \quad = \quad u^\star \circ u(x) - \lambda u^\star(x) = u^\star(\lambda x)\lambda u^\star(x) = 0$$

Ainsi $u(u^\star(x)) = \lambda u^\star(x)$ donc $u^\star(x) \in E_\lambda$.
Il en résulte que E_λ est stable par $u^\star$.

Exercice 22
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
2. Soient B et C dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = C^2 = A$.
   a) Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ telles que :
   $$A = PD^2{}^tP = Q\Delta^2{}^tQ.$$
   b) En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $RD^2 = \Delta^2 R$.
   Établir l'égalité : $RD = \Delta R$. *On pourra comparer les coefficients de ligne i et de colonne j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de ces deux matrices.*
   c) Conclure qu'il existe une unique racine carrée de A dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, que l'on notera $\sqrt{A}$.
3. **Une application : la décomposition polaire dans** $GL_n(\mathbb{R})$
   Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
   a. Montrer que ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   En déduire qu'il existe une matrice symétriques $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = S^2$.
   b. Démontrer qu'il existe un unique couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

1. La matrice A est symétrique réelle : elle est orthogonalement diagonalisable. Il existe ainsi D matrice diagonale et P dans $O_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$A = PD{}^tP.$$
Ecrivons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme $A \in SDP_n(\mathbb{R})$ chaque λ_i, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ est strictement positifs. Posons alors :
$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$
La matrice $B = P\Delta{}^tP$ est clairement symétrique (${}^tB = B \dots$), à valeur propres strictement positives, et vérifie (puisque ${}^tP = P^{-1}$) :
$$B^2 = {}^tP\Delta^2P = {}^tPDP = A.$$
Conclusion. $\boxed{A \text{ admet une racine carrée dans } SDP_n(\mathbb{R})}$.

2. a. La matrice B est symétrique réelle : elle est orthogonalement diagonalisable. Il existe donc D matrice diagonale et P matrice orthogonale (en particulier inversible) telles que $B = PD{}^tP$. On a alors $A = B^2 = PD^2{}^tP$

   De même il existe Δ matrice diagonale et $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = Q\Delta^2{}^tQ$.

   b. • Avec les notations de la question précédente, on a $PD^2{}^tP = Q\Delta^2{}^tQ$ donc :
$${}^tP(PD^2{}^tP)P = {}^tP(Q\Delta^2{}^tQ)P$$
   ce qui donne $D^2 = {}^tR\Delta^2R$ où $R = {}^tQP$ est inversible d'inverse ${}^tPQ$.
   Conclusion. $\boxed{\text{Il existe } R \in O_n(\mathbb{R}) \text{ (donc inversible) telle que } RD^2 = \Delta^2R}$.

   • On écrit $R = [r_{i,j}]$ et $D = [d_{i,j}]$, $\Delta = [\delta_{i,j}]$, $RD = [\alpha_{i,j}]$ et $\Delta R = [\beta_{i,j}]$. Pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ on a (puisque D et Δ sont diagonales) :
$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} r_{i,k}d_{k,j} = r_{i,j}d_{j,j} \quad \text{et} \quad \beta_{i,j} = r_{i,j}\delta_{i,i}$$
   Comme $RD^2 = \Delta^2R$ un calcul similaire donne, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $r_{i,j}d_{j,j}^2 = r_{i,j}\delta_{i,i}^2$, d'où :
$$r_{i,j}(d_{j,j}^2 - \delta_{i,i}^2) = 0 \quad \text{i.e.} \quad r_{i,j}(d_{j,j} - \delta_{i,i})(d_{j,j} + \delta_{i,i}) = 0.$$
   Or pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ $d_{i,i}$ et $\delta_{i,i}$ sont respectivement des valeurs propres de B et C donc sont strictement positifs. Il en résulte que, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a $d_{j,j} + \delta_{i,i} > 0$ et ainsi $r_{i,j}(d_{j,j} - \delta_{i,i}) = 0$ ce qui démontre que :
$$\boxed{RD = \Delta R}.$$
   c. Avec les notations précédentes on a ${}^tQPD = \Delta{}^tQP$ ce qui amène, en multipliant à gauche par Q et à droite par ${}^tP$, $PD{}^tP = Q\Delta{}^tQ$ i.e. $B = C$.

   Conclusion. On vient de démontrer que si B et C sont deux racines carrées de A dans $SDP_n(\mathbb{R})$ alors $B = C$. Cela signifie que A admet une unique racine carrée dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et on peut alors noter $\sqrt{A}$ cette matrice.

3. **Une application : la décomposition polaire dans $GL_n(\mathbb{R})$**

   a. • On a ${}^t({}^tMM) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM$ donc ${}^tMM0$ est symétrique. Puis soit X non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :
$${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geqslant 0$$
   et $\|MX\| = 0$ si et seulement si $MX = 0$ i.e. $X = 0$ puisque M est inversible. Il en résulte que ${}^tXMX > 0$.

   Les deux points précédents permettent d'affirmer, selon la question **III-B-1**, que ${}^tMM \in SDP_n(\mathbb{R})$.

   • Il existe donc une unique matrice $S \in SDP_n(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^tMM$ selon la question **III-B-3c**.

   b. *Analyse.* Supposons qu'il existe un couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in SDP_n(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. On a alors :
$${}^tMM = {}^t(OS)OS = {}^tS{}^tOOS = S^2$$

donc $S = \sqrt{{}^tMM}$ et $O = MS^{-1}$ ce qui prouve l'unicité d'un tel couple.

Synthèse. Posons $S = \sqrt{{}^tMM}$ et $O = MS^{-1}$. On a bien $S \in SDP_n(\mathbb{R})$ et $M = OS$. Vérifions que $O \in O_n(\mathbb{R})$. On a :

$$^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tMMS^{-1} = \underbrace{({}^tS)^{-1}}_{=S^{-1}} S^2S^{-1} = I_n$$

donc O est inversible avec $O^{-1} = {}^tO$ i.e. $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Conclusion. Il existe un unique couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in SDP_n(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.

Exercice 23
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$.
2. Démontrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = {}^tMM$.

1. • On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a alors :

$$^tXAX = {}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|_*^2 \geqslant 0,$$

où $\| \|_*$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

• On suppose que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il existe alors (à redémontrer) $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = M^2 = {}^tMM$.

2. • On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = {}^tMM$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul, on a alors :

$$^tXAX = {}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|_*^2 \geqslant 0,$$

où $\| \|_*$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Si de plus $\|MX\|_*^2 = 0$ alors $MX = 0$ et comme M est inversible, $X = 0$.

Conclusion. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul, on a ${}^tXAX > 0$ donc $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

• On suppose que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il existe alors (à redémontrer) $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^2 = {}^tMM$.

Exercice 24
Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. On note λ_{max} la valeur propre de f de plus grande valeur absolue. Démontrer que :

$$|\lambda_{max}| = \max\left\{\left|\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}\right| \mid x \in E \setminus \{0\}\right\} = \max\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\}.$$

Noter qu'il y a plusieurs choses à démontrer :

— que les ensembles $\mathcal{E}_1 = \left\{\left|\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}\right| \mid x \in E \setminus \{0\}\right\}$ et $\mathcal{E}_2 = \left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\}$ admettent une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ qui est en fait un maximum ;
— que ces deux maximums sont égaux à $|\lambda|$.

• Comme f est autoadjoint, d'après le théorème spectral, il existe une base $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(e_1, \ldots, e_n)$. On a alors :

$$\begin{cases} \langle f(x), x\rangle & = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \\ |f(x)|^2 & = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \end{cases}.$$

De là : $\begin{cases} |\langle f(x), x\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, x_i^2 \leqslant |\lambda| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |\lambda|\, \|x\|^2 \\ \|f(x)\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leqslant |\lambda|^2\, \|x\|^2 \end{cases}$

Il en résulte que les ensembles $\mathcal{E}_1 = \left\{ \left| \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right| \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ et $\mathcal{E}_2 = \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ (en supposant $\dim E \geqslant 1$) majorée par $|\lambda|$: ils admettent une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ avec $\sup \mathcal{E}_1 \leqslant |\lambda|$ et $\sup \mathcal{E}_2 \leqslant |\lambda|$.

• Soit x_0 un vecteur propre associé à λ (en particulier x_0 est non nul). On a alors :

$$\langle f(x_0), x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|^2 ,$$

et ainsi $|\lambda| = \dfrac{|\langle f(x_0), x_0 \rangle|}{\|x_0\|^2}$.
De là $\lambda = \sup \mathcal{E}_1 = \max \mathcal{E}_1$.

On a encore $\|f(x_0)\|^2 = \lambda^2 \|x_0\|^2$, donc $|\lambda| = \dfrac{\|f(x_0)\|}{\|x_0\|}$ et ainsi $\lambda = \sup \mathcal{E}_2 = \max \mathcal{E}_2$.

Exercice 25 (Egalités de Courant-Fischer.)
Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{G}(p)$ l'ensemble des sous-espaces de dimension p de E pour $p \in \{1 \dots n\}$. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, symétrique, de valeurs propres $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$. Pour F sous-espace vectoriel de E, on désigne par S_F l'ensemble des vecteur de F de norme 1. On souhaite démontrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\lambda_k = \sup_{F \in \mathcal{G}(k)} \left(\inf_{x \in S_F} \langle u(x), x \rangle \right) = \inf_{F \in \mathcal{G}(n-k+1)} \left(\sup_{x \in S_F} \langle u(x), x \rangle \right).$$

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que pour $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est un vecteur propre de u associé à λ_i.

1. Justifier de l'existence de β.
2. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose $F_k = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k)$.
   a) Démontrer que pour tout x dans F_k de norme 1 on a : $\langle u(x), x \rangle \geqslant \lambda_k$.
   b) En déduire que $\lambda_k \leqslant \sup\limits_{F \in \mathcal{G}(k)} \left(\inf\limits_{x \in S_F} \langle u(x), x \rangle \right)$.
3. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose $G_k = \mathrm{vect}(e_k, \dots, e_n)$.
   a) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Justifier que $\dim(F \cap G_k) \geqslant 1$.
   b) En déduire que $\lambda_k \geqslant \sup\limits_{F \in \mathcal{G}(k)} \left(\inf\limits_{x \in S_F} \langle u(x), x \rangle \right)$.
4. Démontrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a : $\lambda_k = \inf\limits_{F \in \mathcal{G}(n-k+1)} \left(\sup\limits_{x \in S_F} \langle u(x), x \rangle \right)$
5. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que l'application $v \mapsto \lambda_k(v)$ (k-ième valeur propre de v dans l'ordre décroissant) est continue de l'espace des endomorphismes symétriques $\mathcal{S}(E)$ de E dans $\mathbb{R}$.

1. C'est le théorème spectral, puisque u est un endomorphisme symétrique.

2. a) Soit $x \in F$ de norme 1 on écrit $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \langle u(x), x \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle u(e_i), e_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \delta_i^j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \\ &\geqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k \end{aligned}$$

   b) Il en résulte que $\min\limits_{x \in S_{F_k}} \langle u(x), x \rangle \geqslant \lambda_k$. On peut alors dire que :

$$\sup_{F \in \mathcal{G}_k} \left(\inf_{x \in S} \langle u(x), x \rangle \right) \geqslant \lambda_k.$$

3. a) G est de dimension $n - k + 1$ et F est de dimension k. Or on a :

$$n \geqslant \dim(F \cap G_k) = \dim F + \dim G_k - \dim(F \cap G_k)$$

   et ainsi : $\dim(F \cap G_k) \geqslant k + n - k + 1 - n = 1$.

b) Pour tout x dans G on obtient par un calcul identique au précédent :

$$\langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_k \|x\|^2 .$$

Comme $F \cap G \neq \{0\}$, on dispose donc d'un vecteur x_0 de norme 1 dans $F \cap G$. Pour ce vecteur on a donc

$$\langle u(x_0), x_0\rangle \leqslant \lambda_k,$$

par un calcul identique à celui de la question 2a. Il vient alors $\min\limits_{x \in S_F} \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_k$.

Cette dernière inégalité étant valable pour tout $F \in \mathcal{G}_k$ on a donc

$$\sup_{F \in \mathcal{G}_k} \left(\min_{x \in S_F} \langle u(x), x\rangle \right) \leqslant \lambda_k$$

4. On procède de la même manière...

5. (5/2) Soient u et v dans $S(E)$. Fixons $F \in \mathcal{G}_p$. Pour tout $x \in S_F$ on a :

$$\begin{aligned} |\langle u(x), x\rangle - \langle v(x), x\rangle| &= |\langle u(x) - v(x), x\rangle| \leqslant \|(u - v)(x)\| \, \|x\| \\ &\leqslant \|u - v\| \end{aligned}$$

Ainsi il vient, pour tout x dans S_F :

$$\langle u(x), x\rangle \leqslant \|u - v\| + \langle v(x), x\rangle .$$

Ainsi $\min\limits_{y \in S_F} \langle u(y), y\rangle \leqslant \|u - v\| + \langle v(x), x\rangle$ d'où :

$$\min_{y \in S_F} \langle u(y), y\rangle - \|u - v\| \leqslant \langle v(x), x\rangle ,$$

donc $\min\limits_{y \in S_F} \langle u(y), y\rangle - \|u - v\| \leqslant \min\limits_{y \in S_F} \langle v(y), y\rangle \leqslant \lambda_k(v)$, ce qui amène :

$$\lambda_k(u) \leqslant \|u - v\| + \lambda_k(v).$$

De la même manière $\lambda_k(v) \leqslant \|u - v\| + \lambda_k(u)$ et il vient :

$$|\lambda_k(u) - \lambda_k(v)| \leqslant \|u - v\| .$$

L'application considérée est lipschitzienne donc continue.