Feuille d'exercices n° 12. Variables aléatoires discrètes
Quelques corrections

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \exists\ k \in \,]0,1[\, : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = kP(X \geqslant n) \end{cases}$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 2 (Approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale)
Soient $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose que X_n est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de la suite $\big(P(X_n = k)\big)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Déterminer la loi de $X_1 - X_2$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une système (quasi) complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 - X_2 = n, X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = n+k, X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = n+k)P(X_2 = k) \quad \text{par indépendance} \end{aligned}$$

- Si $n \geqslant 0$ il vient :

$$\begin{aligned} P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = n+k)P(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{n+2k-2}p^2 = (1-p)^n p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} \\ &= p^2 \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^n}{2-p} \end{aligned}$$

- Si $n \leqslant 0$ il vient, comme $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = n+k)P(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1-n}^{+\infty} (1-p)^{n+2k-2}p^2 = (1-p)^n p^2 \sum_{k=1-n}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} \\ &= \frac{p(1-p)^{-n}}{2-p} \end{aligned}$$

Exercice 4
Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de lois géométriques respectives de paramètres p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $[Z \geqslant n] = [X \geqslant n] \cap [Y \geqslant n]$.

2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 5
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité de l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ inversible}\}$.

Exercice 6 (Loi hypergéométrique $\boldsymbol{\mathcal{H}(N, n, p)}$)
Soient $p \in]0,1[$, n et N dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\begin{cases} pN \in \mathbb{N} \text{ et } pN \geqslant n \\ (1-p)N \in \mathbb{N} \text{ et } (1-p)N \geqslant n \end{cases},$$

On effectue n tirage sans remise d'une boule dans une urne qui contient pN boules blanches et $(1-p)N$ boules rouges. On note X_N la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X_N.
2. **Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale**. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Étudier la convergence de la suite $\big(P(X_N = k)\big)_{N \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7
Une secrétaire appelle n clients. Chaque client répond avec une probabilité de $p \in]0,1[$, indépendamment des autres.
On note X la variable aléatoire discrète correspondant au nombre de clients ayant répondu lors de cet appel.
Ensuite elle décide de rappeler ceux qui n'ont pas répondu, soit $n - X$ personnes, et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de ce second appel - mêmes hypothèses sur les réponses.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer, pour $i \in \{0, \dots, n\}$, la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = i]$.
3. Posons $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 8
Soit $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant chacune la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega)$ la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. La matrice M peut-elle être inversible ?
2. Déterminer la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur.
3. Soit T la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le cardinal de l'ensemble des valeurs propres de $M(\omega)$.
   a) Montrer que $T(\Omega) = \{1, 2\}$.
   b) Déterminer la loi de T et son espérance.
   c) Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.
   Déterminer la probabilité pour qu'une ligne de M soit égale à la somme des deux autres lignes de M.

1. La matrice M est de rang inférieur à 1 : elle n'est pas de rang maximum. Ainsi M n'est pas inversible (et 0 est valeur propre de M).
2. La matrice M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$. Or on a :
   $$M^2 = (X + Y + Z)M.$$
   Notons A l'événement : « *M est la matrice d'un projecteur* ». On a :
   $$A = [X + Y + Z = 1] \sqcup [X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0].$$
   Ainsi $P(A) = P(X + Y + Z = 1) + P(X = 0, Y = 0, Z = 0)$. Par indépendance des variables X, Y et Z, on a $X + Y + Z \sim \mathcal{B}(3n, p)$ donc :
   $$P(X + Y + Z = 1) = \binom{3n}{1} p(1-p)^{3n-1}.$$
   Toujours par indépendance des variables X, Y et Z, on a : $P(X = 0, Y = 0, Z = 0) = P(X = 0)P(Y = 0)P(Z = 0) = (1-p)^{3n}$.
   Conclusion. $P(A) = 3np(1-p)^{3n-1} + (1-p)^{3n} = (1-p)^{3n-1}(3np + (1-p))$.

3. a) Comme M est de rang $r \leqslant 1$, 0 est valeur propre de M de multiplicité géométrique $g = 1 - r$. Comme les sous-espaces propres de M sont en somme directe, il n'y a au plus qu'une autre valeur propre de M. Ainsi $T(\Omega) \subset \{1, 2\}$.

   b) Le polynôme caractéristique de M est de la forme $\chi_M = X^2(X - a)$ où $a = \mathrm{tr}(A)$ puisque le coefficient de X^2 dans χ_M est $-\mathrm{tr}(M)$. Ainsi :

$$\begin{cases} P(T = 1) = P(\mathrm{tr}(M) = 0) = P(X + Y + Z = 0) = (1 - p)^{3n} \\ P(T = 2) = 1 - (1 - p)^{3n} \end{cases}$$

   c) Si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, $\mathrm{tr}(M)$ est racine simple du polynôme caractéristique de M et la dimension algébrique de la valeur propre 0 est égale à sa dimension géométrique : M est diagonalisable.
   Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, M n'admet qu'une seule valeur propre qui est 0 et M est diagonalisable si et seulement si $M = 0$.
   Notons B l'événement : « *M est diagonalisable* ». On a donc l'union disjointe :

$$B = [X + Y + Z \neq 0] \sqcup [X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0].$$

   Comme X, Y et Z sont positive, on a $\overline{[X + Y + Z \neq 0]} = [X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0]$ donc $P(B) = 1$.

4. Soit C l'événement : « *une ligne de M est égale à la somme des deux autres lignes de M.* »
   On a $C = [X = Y + Z] \cup [Y = X + Z] \cup [Z = X + Y]$.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leqslant x)$.

1. Démontrer que F est croissante et à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Démontrer que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ *et* $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.
3. Démontrer que F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que pour tout a réel on a $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) = F(a) - P(X = a) = P(X < a)$.

1. Une probabilité étant comprise entre 0 et 1, pour tout x réel on a : $F(x) = P(X \leqslant x) \in [0, 1]$.
   Soient $x \leqslant y$ dans $\mathbb{R}$. Comme $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$, par croissance d'une mesure de probabilité, on a $F(x) \leqslant F(y)$ et ainsi F est croissante.

2. • Montrons que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$.
   Comme F est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite réelle ℓ en $-\infty$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $A_n = [X \leqslant -n]$. La suite (A_n) est décroissante pour l'inclusion donc (continuité monotone) :

$$P(A_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right).$$

   Par composition des limites on a $P(A_n) = F(-n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc, par unicité de la limite, on a :

$$\ell = P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right).$$

   Or $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = \emptyset$, donc $\ell = 0$.

   • Montrons que $\lim\limits_{-\infty} F = 1$.
   Comme F est décroissante et majorée par 1, elle admet une limite réelle L en $+\infty$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $B_n = [X \leqslant n]$. La suite (B_n) est croissante pour l'inclusion donc (continuité monotone) :

$$P(B_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k\right).$$

   Par composition des limites on a $P(B_n) = F(n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} L$ donc, par unicité de la limite, on a :

$$L = P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k\right).$$

   Or $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = \Omega$, donc $L = 1$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$.

La fonction F est croissante et minorée : elle admet une limite réelle à droite en tout point de $\mathbb{R}$, en particulier en a. Ainsi :
$$\exists \lim_{x \to a^+} F(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = [X \leqslant a + \frac{1}{n}]$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité monotone d'une mesure de probabilités, il vient :
$$P(A_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right).$$
Mais $P(A_n) = F(a + 1/n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par composition des limites. Par unicité de la limite on a donc :
$$\ell = P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right).$$
Enfin l'événement $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ n'est autre que $[X \leqslant a]$. En effet :

- Soit $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\omega \in A_n$, i.e. $X(\omega) \leqslant a + \frac{1}{n}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient : $X(\omega) \leqslant a$.
  Ainsi $\omega \in [X \leqslant a]$. Il en résulte que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset [X \leqslant a]$
- Soit $\omega \in [X \leqslant a]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $X(\omega) \leqslant a \leqslant a + \frac{1}{n}$, donc $\omega \in A_n$.
  Ainsi : $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Il en résulte que $[X \leqslant a] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

Il vient donc $\ell = F(a)$, ce qui signifie que F est continue à droite en a.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$.

La fonction F est croissante et majorée : elle admet une limite réelle à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, en particulier en a. Ainsi :
$$\exists \lim_{x \to a^+} F(x) = \lambda \in \mathbb{R}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $B_n = [X \leqslant a - \frac{1}{n}]$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. Par continuité monotone d'une mesure de probabilités, il vient :
$$P(A_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right).$$
Mais $P(B_n) = F(a - 1/n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ par composition des limites. Par unicité de la limite on a donc :
$$\lambda = P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k\right).$$
Enfin l'événement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$ n'est autre que $[X < a]$. En effet :

- Soit $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in B_n = [X - 1/n] \subset [X < a]$. Il en résulte que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \subset [X < a]$.
- Soit $\omega \in [X < a]$. Comme $1/n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $X(\omega) \leqslant a - \dfrac{1}{N}$.
  Ainsi $\omega \in B_N \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$.

Il vient donc $\lambda = P(X < a) = P[X \leqslant a] - P(X = a) = F(a) - P(X = a)$.

Exercice 10
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :
$$E(X) = \alpha \quad \text{et} \quad E(X^2) = E(X^4) = 1.$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et 1.
2. Déterminer la loi de X.

1. On a : $0 \leqslant V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \alpha^2$ ce qui force $\alpha \in [-1, 1]$.
2. On a $V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 0$ donc X^2 est presque sûrement constante égale à $E(X^2) = 1$. Il en résulte que l'on a $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ presque sûrement.
   Enfin $\alpha = E(X) = -P(X = -1) + P(X = 1) = 2P(X = 1) - 1$ donc :

$$\begin{cases} P(X = 1) & = (1 + \alpha)/2 \\ P(X = -1) & = (1 - \alpha)/2 \end{cases}$$

Exercice 11
Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Déterminer le nombre de couples $(i, j) \in \{1, \dots, n + 1\}^2$ tels que $|i + j - n - 2| = 1$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{1, \dots, n + 1\}$. Pour tout (i, j) dans $\{1, \dots, n + 1\}^2$ on pose :

$$a_{i,j} = P(X = j, Y = i) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = P_{[X=j]}(Y = i)$$

   On suppose que $a_{i,j} = \alpha$ si $|i + j - n - 2| = 1$ et 0 sinon.

   a. Déterminer la valeur de α.
   b. Déterminer les lois de X et Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
   c. Expliciter la matrice $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et montrer que 1 est valeur propre de B.
   d. Ici on suppose $n = 3$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

1. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n + 1\}^2$. En utilisant l'équivalence $|*| = 1 \Leftrightarrow (* = -1 \text{ ou } * = 1)$ on obtient :

$$|i + j - n - 2| = 1 \Leftrightarrow (i + j = n + 3 \quad \text{ou} \quad i + j = n + 1)\,.$$

   Un petit tableau donne :

i	1	2	...	$n+1$	$n+2$
$n+3-i$	$n+2$	$n+1$	...	2	1

   Il y a donc n couples (i, j) dans $\{1, \dots, n + 1\}^2$ tels que $i + j = n + 3$. On trouve de même qu'il y a n couples (i, j) dans $\{1, \dots, n + 1\}^2$ tels que $i + j = n + 1$.

   Conclusion. Il y a $2n$ couples $(i, j) \in \{1, \dots, n + 1\}^2$ tels que $|i + j - n - 2| = 1$.

2. a) Les événements $[X = i] \cap [Y = j]$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, n + 1\}^2$ forment un système complet d'événements. Mais tous ont une probabilité nulle sauf $2n$ parmi eux qui ont la probabilité α. Il en résulte que $\alpha = \dfrac{1}{2n}$.

   b) • Il est judicieux d'écrire la matrice A des probabilités $a_{i,j}$ pour comprendre la suite.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & & & \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

   Les événements $[Y = j]$ pour $j \in \{1, \dots, n + 1\}$ forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n + 1\}$:

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = 1 \text{ ou } n + 1 \\ 2\alpha & \text{sinon} \end{cases}.$$

   De la même manière, la variable aléatoire Y à la même loi que X.

   • On a $P(X = 1, Y = 1) = 0$ alors que $P(X = 1)P(Y = 1) = \alpha^2 \neq 0$: les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

c) Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n+1\}^2$ on a :

$$b_{i,j} = \frac{P(X=i, Y=j)}{P(X=i)} = \begin{cases} a_{i,j}/\alpha & \text{si } i=1 \text{ ou } i=n+1 \\ a_{i,j}/(2\alpha) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & & & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Comme la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1, 1 est valeur propre de B pour le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

d) Pour $n=3$, on a $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

— On a $B + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ qui est une matrice de rang puisque ses colonnes $C_1, C_2, C3$ et C_4 vérifient $2C_1 = C_3$, $C_2 = 2C_4$, C_1 et C_2 non proportionnelles.

Ainsi $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de B et l'espace propre associé est de dimension 2.

— Si maintenant B est diagonalisable, sa « dernière » valeur propre possible λ est donnée par la trace :

$$\lambda = \mathrm{tr}B - \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 1$$

Mais $B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2.

Ainsi B est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 2.

NB : on peut aussi calculer $\chi_B \dots$

Exercice 12

On effectue des lancers d'une pièce donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant face avec la probabilité $q = 1-p$, les différents lancers étant supposés indépendants. Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au $k^{\text{ème}}$ lancer », on note également S_k le rang du $k^{\text{ème}}$ pile. On suppose que S_k est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 prend la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, S_3 prend la valeur 6, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

1. La fonction `random()` du module Python `numpy.random` renvoi un réel aléatoire entre 0 et 1. Compléter les lignes 7 et 9 de la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
(1)   from numpy.random import random
(2)   def S(k,p) :
(3)       n = 0
(4)       c = 0
(5)       while c<k :
(6)           n=n+1
(7)           if ... :
(8)               c = c+1
(9)       return ...
```

2. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.
3. Soit k un entier naturel ≥ 2. Pour tout entier naturel $n \geq k$, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.
   a) Donner la loi de X_{n-1}.

b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

On dit que S_k suit la loi *binomiale négative* de paramètres k et p.

4. Soit k un entier ≥ 2. On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier $i \geq 2$, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

   a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.

   b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.

   c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

   d) Déterminer $\mathrm{cov}(S_i, S_j)$ pour i et j dans $\mathbb{N}^*$.

5. Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Montrer alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ est d'espérance finie et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.

1. Le programme complété peut être le suivant :

```
from numpy.random import random
def S(k,p) :
    n = 0
    c = 0
    while c<k :
        n=n+1
        if random()<p :
            c = c+1
    return n
```

2. S_1 compte le nombre de lancers qu'il faut réaliser pour obtenir pour la première fois un pile : S_1 suit la loi géométrique de paramètre p. On a alors $E(X_1) = \dfrac{1}{p}$.

3. a) X_{n-1} compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli (les épreuves sont indépendantes et identiques!) constitué de $n-1$ épreuves :

$$X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p).$$

   b) On a de suite : $S_k(\Omega) = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geqslant k\}$ De plus : $[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \cap P_n$..

   c) Soit $n \geq k$ entier. Comme les lancers sont indépendants les uns des autres on a :

$$P([S_k = n]) = P(X_{n-1} = k-1)P(P_n) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} P(P_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

4. a) Par définition, Z_i désigne le temps d'attente entre le $(i-1)$-ème pile et le i-ème pile (voire le temps d'attente du premier pile si $i = 1$). Comme les résultats des lancers sont indépendants et que la probabilité d'obtenir pile est égale à p à chaque lancer, on en déduit que, pour tout $i \geqslant 2$:

$$\boxed{Z_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

Autre idée, plus fastidieuse

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire de Bernoulli W_j telle que l'événement $[W_j = 1]$ est réalisé si et seulement si on obtient *Pile* au lancer j.

Soit $i \geqslant 2$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Comme $([S_{i-1} = \ell])_{\ell \geqslant i-1}$ est un système (quasi) complet d'événement, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
P(Z_i = m) &= \sum_{\ell=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = \ell, Z_i = m,) \\
&= \sum_{\ell=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = \ell, W_{\ell+1} = 0, W_{\ell+2} = 0, \ldots, W_{m-1} = 0, W_m = 1)
\end{aligned}$$

b) Soit $i \geqslant 2$ entier. On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i = Z_1 + \sum_{i=2}^{k} S_i - S_{i-1} = S_1 + S_k - S_1 = S_k$.

Ainsi : $\boxed{S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i}$.

c) Comme les Z_i suivent toutes la loi géométrique de paramètre p, elles admettent toutes une espérance égale à $\dfrac{1}{p}$. Dès lors, comme $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$, la variable aléatoire S_k admet aussi une espérance comme somme de variables aléatoires qui admettent une espérance. Par linéarité de l'espérance, il vient :

$$E(S_k) = E\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p} = \frac{k}{p}.$$

d) Soient $i < j$ dans $\mathbb{N}^*$. On a $S_j = S_i + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j} Z_k$. Par « bilinéarité » de la covariance, il vient :

$$\operatorname{cov}(S_i, S_j) \quad = \quad \operatorname{cov}(S_i, S_i) + \operatorname{cov}\left(S_i, \sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right)$$

Comme les variables aléatoires $S_i = \displaystyle\sum_{k=1} Z_k$ et $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{j} Z_k$ sont indépendantes (par le lemme des coalitions), on a $\operatorname{cov}\left(S_i, \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right) = 0$ et ainsi : $\operatorname{cov}(S_i, S_j) = V(S_i)$, égalité encore valable si $i = j$.

5. • Comme $S_{k-1}(\Omega) = \{m \geqslant k-1 \mid m \in \mathbb{N}\}$, la famille $([S_{k-1} = j])_{j \geq k-1}$ est le système complet d'événements associé à S_{k-1}. Ainsi :

$$\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j) = 1.$$

• Comme la variable aléatoire S_k ne prend que des valeurs entières $\geq k$ d'après la question $(2)(b)$, on voit que $S_k \geq k$, et donc :

$$0 \leq \frac{k-1}{S_k - 1} \leq \frac{k-1}{k-1} = 1.$$

En particulier, la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k-1}$ est bornée par 1 (en valeur absolue). Par domination que $\dfrac{k-1}{S_k-1}$ admet une espérance.

Passons au calcul de $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right)$. D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k-1}{n-1} P([S_k = n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k-1}{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1-1}{k-1-1} p^{k-1+1} q^{n-1-k+1} \\
&= p \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1-1}{k-1-1} p^{k-1} q^{n-1-k+1} = p \sum_{n=k}^{+\infty} P([S_{k-1} = n-1]).
\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indices $j = n-1$ dans la somme de droite et en utilisant le résultat du début de cette question, on trouve que :

$$E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) = p \sum_{j=k-1}^{+\infty} P([S_{k-1} = j]) = p \times 1 = p.$$

Exercice 13

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même ensemble probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$. On pose :

$$Z = |X - Y| \quad \text{et} \quad T = \min(X, Y)$$

1. **Autour du théorème de transfert**
   a) Justifier de l'existence de moments de tout ordre pour Z et T i.e. justifier que $E(Z^m)$ et $E(T^m)$ existent pour tout m entier naturel.
   b) Déterminer $E(Z)$ sans calculer la loi de Z. En donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit U une variable aléatoire à valeur dans $\{0,\dots,K\}$ où $K \in \mathbb{N}^*$.
   a) Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$.
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$, $E(U^2)$ et $E(U^3)$.
3. *Pour étudier la loi d'un minimum de variables aléatoires, il est judicieux de calculer la probabilité que ce minimum soit supérieur à un nombre quelconque.*
   a) Calculer pour tout j dans $\mathbb{N}$ la probabilité $P(T \geqslant j)$.
   b) En utilisant la question 2a, retrouver la valeur de $E(T)$.
4. **Utilisation de la linéarité de l'espérance**
   a) Calculer $E(Z^2)$ en fonction de σ_X^2.
   b) Déterminer $V(Z)$.

Exercice 14 (Loi d'un maximum)
Toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 2.
   a) Démontrer que $E(U) = \displaystyle\sum_{j\geqslant 1} P(U \geqslant j)$.
   b) Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{j\geqslant 1} jP(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$ et $E(U^2)$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante, de même loi μ.

   Pour tout k dans $\mathbb{N}$ on note $p_k = P(X_n = k)$ et $F_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $M_n = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

   Pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer la probabilité $P(M_n \leqslant k)$. en fonction de F_k et n.
3. On suppose que μ est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,\dots,K\}$ où $K \geqslant 1$ entier.
   a) Déterminer $P(M_n = k)$ pour tout k dans $\{1,\dots,K\}$.
   b) On jette trois dés équilibrés. Quelle est la probabilité que le maximum des numéros obtenus soit 4 ?
4. On suppose maintenant que μ est la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
   a) Déterminer $E(M_n)$.
   b) Trois joueurs jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et s'arrêtent dés qu'ils obtiennent pile. La variable aléatoire M_3 est alors le nombre de jet effectués par le ou les joueurs ayant obtenu pile en dernier. Déterminer $E(M_3)$.

1. a. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(U \geqslant j) = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=j}^{+\infty} P(U = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\underbrace{\sum_{j=1}^{i} P(U = i)}_{=iP(U=i)} = E(U).$$

   b. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{+\infty} jP(U \geqslant j) &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\sum_{i=j}^{+\infty} P(U = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{i} jP(U = i)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{i(i+1)}{2}P(U = i)\\ &= \frac{1}{2}E(U^2) + \frac{1}{2}E(U)\end{aligned}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(M_n \leqslant k) &= P\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} [X_i \leqslant k]\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant k) \text{ par indépendance} \\
&= F_k^n \text{ puisque les } X_i \text{ on même loi } \mu
\end{aligned}$$

3. a. Pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$, on a :

$$P(M_n = k) = P(M_n \leqslant k) - P(M_n \leqslant k-1) = F_k^n - F_{k-1}^n = \left(\frac{k}{K}\right)^n - \left(\frac{k-1}{K}\right)^n = \frac{1}{K^n}\left(k^n - (k+1)^n\right).$$

b. Soit X_i la variable aléatoire qui donne le numéro du dé i ($i \in \{1, 2, 3\}$. Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et on cherche, avec les notations de l'énoncé :

$$P(M_3 = 4) = \frac{1}{6^3}(4^3 - 3^3) \approx 0,17.$$

4. a. La première question assure que, dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
E(M_n) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(M_n \geqslant j) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - P(M_n \leqslant j-1)) = 1 + \sum_{j=2}^{+\infty} (1 - P(M_n \leqslant j-1))
\end{aligned}$$

Puis, si $j \geqslant 2$ entier :

$$P(M_n \leqslant j-1) = \left(\sum_{k=1}^{j-1} p(1-p)^{k-1}\right)^n = \left(p\frac{1-(1-p)^{j-1}}{1-(1-p)}\right)^n = \left(1-(1-p)^{j-1}\right)^n.$$

Le binôme de Newton donne :

$$P(M_n \leqslant j-1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (1-p)^{ij-1}.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
E(M_n) &= 1 + \sum_{j=2}^{+\infty} (1 - P(M_n \leqslant j-1)) \\
&= 1 + \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} (1-p)^{ij-1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \sum_{j=2}^{+\infty} (1-p)^{ij-1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{(1-p)^i}{1-(1-p)^i}
\end{aligned}$$

b. On trouve $E(M_3) = \dfrac{22}{7}$.

Exercice 15

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \{0, 1\}^p$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\alpha \in]0, 1[$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \{\omega \in \Omega / X_{np+1}(\omega) = s_1, X_{np+2}(\omega) = s_2, \ldots, X_{(n+1)p}(\omega) = s_p\}$

Si E est un événement, on désignera par E^c son complémentaire dans l'univers Ω.

1. Justifier l'assertion : $\omega \in \bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) \Rightarrow s$ apparaît une infinité de fois dans $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots)$

2. Montrer que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

3. Déterminer l'événement $\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right)\right)^c$.

4. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $P\left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right) = 0$.

5. En déduire que $P\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right)\right) = 1$ et interpréter ce résultat.

1. Soit $\omega \in \bigcap_{k=0}^{\infty}(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i)$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\omega \in \bigcup_{i=k}^{\infty} B_i$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $i \geqslant k$ tel que $\omega \in B_i$: ω appartient donc à une infinité de B_i.

   Commentaire : il y a en fait équivalence. Démontrons cela. On a, pour $\omega \in \Omega$, les équivalences :

$$\begin{aligned} w \notin \bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) &\Leftrightarrow (\exists k_0 \in \mathbb{N})\left(\omega \notin \bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) \\ &\Leftrightarrow (\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall i \geqslant k_0)(\omega \notin B_i) \end{aligned}$$

2. Soit J une partie finie de $\mathbb{N}^*$. On écrit $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ où $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ sont des entiers.
   On a :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = P(B_{j_1} \cap \cdots \cap B_{j_n}) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{p}[X_{j_1 p+i} = s_i]\right) \cap \cdots \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p}[X_{j_n p+i} = s_i]\right)\right)$$

   Mais, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j_i < j_{i+1}$ donc $j_i + 1 \leqslant j_{i+1}$ et ainsi $(j_i + 1)p \leqslant j_{i+1}p$ donc $(j_i + 1)p < j_{i+1}p + 1$.
   Comme (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes, il vient :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{p} P(X_{j_1 p+i} = s_i)\right)}_{=P(B_{j_1})} \times \cdots \times \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{p} P(X_{j_n p+i} = s_i)\right)}_{=P(B_{j_n})} \\ &= \prod_{j \in J} P(B_j) \end{aligned}$$

   Ceci étant vrai pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^*$, la suite $(B_n)_{n>0}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

3. On utilise les formules de Morgan :

$$\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i)\right)^c = \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right)^c = \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right).$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par le théorème de convergence monotone, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=k}^{N} B_i^c\right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{i=k}^{+\infty} B_i^c\right).$$

   Par indépendance des événements de la suite $(B_i)_{k \geqslant 0}$, la suite $(B_i^c)_{k \geqslant 0}$ est constituée d'événements indépendants. De là, pour tout $N \geqslant k$ entier on a :

$$P\left(\bigcap_{i=k}^{N} B_i^c\right) = \prod_{i=k}^{N} P(B_i^c).$$

   Soit M le nombre de 1 dans s. Comme chaque X_m suit une loi de Bernoulli de paramètre α, on obtient par indépendance, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$P(B_i) = \alpha^M (1-\alpha)^{p-M}$$

   donc $P(B_i^c) = 1 - \alpha^M (1-\alpha)^{p-M}$ ce <u>qui est strictement inférieur à 1</u>.
   Il vient alors $P\left(\bigcap_{i=k}^{N} B_i^c\right) = \left(1 - \alpha^M (1-\alpha)^{p-M}\right)^{N-k+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Conclusion. $P\left(\bigcap_{i=k}^{+\infty} B_i^c\right) = 0$.

5. Par sous-additivité, on a : $P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right)\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{P\left(\bigcap_{i=k}^{+\infty} B_i^c\right)}_{=0} = 0.$

   Il en résulte que : $P\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i)\right) = 1.$

   Ainsi, dans la succession des expériences de Bernoulli de ce problème, la liste s de résultats consécutifs, à partir d'un rang de la forme $kp+1$, apparaît presque sûrement une infinité de fois.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant une variance σ^2 et centrée.

1. Démontrer que pour tout variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2 on a :

$$E(Y) \leqslant \sqrt{E(Y^2)P(Y>0)}.$$

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $P(X \leqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\varepsilon^2}$.

1. On remarque que $P(Y>0) = E(\mathbb{1}_{[Y>0]})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\big(E(Y \times \mathbb{1}_{[Y>0]})\big)^2 \leqslant E(Y^2)E(\mathbb{1}_{[Y>0]}).$$

   Comme $Y \leqslant Y \times \mathbb{1}_{[Y>0]}$, on obtient bien : $E(Y) \leqslant \sqrt{E(Y^2)P(Y>0)}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On applique la première question avec la variable aléatoire $Y = X - \varepsilon$.

Exercice 17

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables aléatoires T définies sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(T \geqslant n) > 0$.

Lorsque $T \in \mathcal{V}$ on note $u(T)$ la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = [u(T)]_n = P_{[T\geqslant n]}(T=n)$.

1. Montrer que si $T \in \mathcal{V}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $[u(T)]_n \in [0,1[$.
2. a) Si $T \in \mathcal{V}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$.
   b) Pour quels éléments T de $\mathcal{V}$ la suite $u(T)$ est-elle constante ?
3. Soit $T \in \mathcal{V}$. Montrer que la série $\sum [u(T)]_n$ est divergente.
4. Réciproquement, soit (u_n) une suite dans $[0,1[$ telle que la série $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$p_n = u_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k).$$

   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1-u_k)$.
   b) Justifier alors qu'il existe une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(T \geqslant n) > 0$ et $u_n = P_{[T\geqslant n]}(T = n)$.

1. Soit $T \in \mathcal{V}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $[u(T)]_n$ est une probabilité, on a $[u(T)]_n \in [0,1]$.

   Puis, comme $[T \geqslant n] = [T \geqslant n+1] \sqcup [T = n]$, on a :

$$[u(T)]_n = P_{[T\geqslant n]}(T=n) = \frac{P([T=n]\cap[T\geqslant n])}{P(T\geqslant n)} = \frac{P(T=n)}{P(T\geqslant n)} = \frac{P(T\geqslant n) - P(T\geqslant n+1)}{P(T\geqslant n)}$$

   Mais par hypothèse, $P(T \geqslant n+1) > 0$ donc $[u(T)]_n < 1$.

2. a) Soit $T \in \mathcal{V}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu que :

$$u_n = \frac{P(T\geqslant n) - P(T\geqslant n+1)}{P(T\geqslant n)}.$$

   Ainsi $P(T \geqslant n+1) = (1-u_n)P(T \geqslant n)$. On montre alors sans peine par récurrence que :

$$P(T\geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k).$$

b) On raisonne par analyse synthèse. Soit $T \in \mathcal{V}$. On suppose que $u(T)$ est constante de valeur p. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(T \geqslant n) = (1-p)^n$$

Au passage cela impose $p < 1$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(T = n) = P(T \geqslant n) - P(T \geqslant n+1) = (1-p)^n - (1-p)^{n+1} = p(1-p)^n.$$

Il en résulte que T suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in [0,1[$ (ou encore $T+1$ suit la loi géométrique du programme de paramètre p).

Synthèse. Aucun souci : si $T+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ alors on a bien $u(T)$ constante (noter que si $p = 0$, $u(T)$ n'est pas constante...).

3. Soit $T \in \mathcal{V}$. La série $\sum\limits_{k \geqslant 0} P(T = k)$ est convergente de somme 1. Ainsi $P(T \geqslant n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geqslant n+1)$ est le reste de cette série. Mais, si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-u_k) = \ln P(T \geqslant n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ainsi la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \ln(1-u_k)$ est divergente. Mais $\ln(1-u_n) \sim u_n \geqslant 0$ donc la série $\sum [u(T)]_n$ est divergente.

4. a) Une petite récurrence amène de suite $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1 - \prod\limits_{k=0}^{n}(1-u_k)$.

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_n \in [0,1]$, il s'agit de montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge de somme 1.

Mais $\prod\limits_{k=0}^{n}(1-u_k) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \ln(1-u_k)$ diverge (vers $-\infty$).

Ainsi la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge de somme 1 : il existe une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $P(T = n) = p_n$.

On a de plus, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P(T \geqslant n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k) > 0.$$

Ainsi $P_{[T \geqslant n}(T = n) = \dfrac{p_n}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)} = u_n.$ □