Feuille d'exercices n° 12. Variables aléatoires discrètes

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \exists\ k \in\ ]0,1[\ : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = kP(X \geqslant n) \end{cases}$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 2 (Approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale)
Soient $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose que X_n est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de la suite $\big(P(X_n = k)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Déterminer la loi de $X_1 - X_2$.

Exercice 4
Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de lois géométriques respectives de paramètres p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $[Z \geqslant n] = [X \geqslant n] \cap [Y \geqslant n]$.
2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 5
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité de l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \ \text{ inversible}\}$.

Exercice 6 (Loi hypergéométrique $\boldsymbol{\mathcal{H}(N, n, p)}$)
Soient $p \in]0,1[$, n et N dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\begin{cases} pN \in \mathbb{N} \text{ et } pN \geqslant n \\ (1-p)N \in \mathbb{N} \text{ et } (1-p)N \geqslant n \end{cases},$$

On effectue n tirage sans remise d'une boule dans une urne qui contient pN boules blanches et $(1-p)N$ boules rouges. On note X_N la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X_N.
2. **Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale**. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Étudier la convergence de la suite $\big(P(X_N = k)\big)_{N\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7
Une secrétaire appelle n clients. Chaque client répond avec une probabilité de $p \in]0,1[$, indépendamment des autres.
On note X la variable aléatoire discrète correspondant au nombre de clients ayant répondu lors de cet appel.
Ensuite elle décide de rappeler ceux qui n'ont pas répondu, soit $n - X$ personnes, et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de ce second appel - mêmes hypothèses sur les réponses.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = i]$.
3. Posons $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 8

Soit $n \geqslant 2$ et $p \in]0,1[$. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant chacune la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $M(\omega)$ la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. La matrice M peut-elle être inversible ?
2. Déterminer la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur.
3. Soit T la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe le cardinal de l'ensemble des valeurs propres de $M(\omega)$.
   a) Montrer que $T(\Omega) = \{1, 2\}$.
   b) Déterminer la loi de T et son espérance.
   c) Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.
   Déterminer la probabilité pour qu'une ligne de M soit égale à la somme des deux autres lignes de M.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La fonction de répartition de X est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leqslant x)$.

1. Démontrer que F est croissante et à valeurs dans $[0,1]$.
2. Démontrer que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ *et* $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.
3. Démontrer que F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que pour tout a réel on a $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) = F(a) - P(X = a) = P(X < a)$.

Exercice 10

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$E(X) = \alpha \quad \text{et} \quad E(X^2) = E(X^4) = 1.$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et 1.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 11

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1. Déterminer le nombre de couples $(i,j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$ tels que $|i + j - n - 2| = 1$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{1, \ldots, n+1\}$. Pour tout (i,j) dans $\{1, \ldots, n+1\}^2$ on pose :

   $$a_{i,j} = P(X = j, Y = i) \quad \text{et} \quad b_{i,j} = P_{[X=j]}(Y = i)$$

   On suppose que $a_{i,j} = \alpha$ si $|i + j - n - 2| = 1$ et 0 sinon.
   a. Déterminer la valeur de α.
   b. Déterminer les lois de X et Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
   c. Expliciter la matrice $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et montrer que 1 est valeur propre de B.
   d. Ici on suppose $n = 3$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 12

On effectue des lancers d'une pièce donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant face avec la probabilité $q = 1 - p$, les différents lancers étant supposés indépendants. Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : « la pièce donne pile (resp. face) au $k^{\text{ème}}$ lancer », on note également S_k le rang du $k^{\text{ème}}$ pile. On suppose que S_k est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 prend la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, S_3 prend la valeur 6, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

1. La fonction `random()` du module Python `numpy.random` renvoi un réel aléatoire entre 0 et 1. Compléter les lignes 7 et 9 de la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
(1)  from numpy.random import random
(2)  def S(k,p) :
(3)      n = 0
(4)      c = 0
(5)      while c<k :
(6)          n=n+1
(7)          if ... :
(8)              c = c+1
(9)      return ...
```

2. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.
3. Soit k un entier naturel ≥ 2. Pour tout entier naturel $n \geq k$, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.
   a) Donner la loi de X_{n-1}.
   b) Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.
   c) En déduire que la loi de S_k est donnée par :
   $$\forall n \geq k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$
   On dit que S_k suit la loi *binomiale négative* de paramètres k et p.
4. Soit k un entier ≥ 2. On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier $i \geq 2$, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
   a) Donner la loi des variables aléatoires Z_i.
   b) Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.
   c) En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.
   d) Déterminer $\operatorname{cov}(S_i, S_j)$ pour i et j dans $\mathbb{N}^*$.
5. Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Montrer alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ est d'espérance finie et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.

Exercice 13
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même ensemble probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. On pose :
$$Z = |X - Y| \quad \text{et} \quad T = \min(X, Y)$$

1. **Autour du théorème de transfert**
   a) Justifier de l'existence de moments de tout ordre pour Z et T i.e. justifier que $E(Z^m)$ et $E(T^m)$ existent pour tout m entier naturel.
   b) Déterminer $E(Z)$ sans calculer la loi de Z. En donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire $E(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit U une variable aléatoire à valeur dans $\{0, \dots, K\}$ où $K \in \mathbb{N}^*$.
   a) Exprimer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$.
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{K} j^2 P(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$, $E(U^2)$ et $E(U^3)$.
3. *Pour étudier la loi d'un minimum de variables aléatoires, il est judicieux de calculer la probabilité que ce minimum soit supérieur à un nombre quelconque.*
   a) Calculer pour tout j dans $\mathbb{N}$ la probabilité $P(T \geqslant j)$.
   b) En utilisant la question 2a, retrouver la valeur de $E(T)$.
4. **Utilisation de la linéarité de l'espérance**
   a) Calculer $E(Z^2)$ en fonction de σ_X^2.
   b) Déterminer $V(Z)$.

Exercice 14 (Loi d'un maximum)
Toutes les variables aléatoires sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant un moment d'ordre 2.
   a) Démontrer que $E(U) = \displaystyle\sum_{j\geqslant 1} P(U \geqslant j)$.
   b) Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{j\geqslant 1} jP(U \geqslant j)$ en fonction de $E(U)$ et $E(U^2)$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante, de même loi μ.

   Pour tout k dans $\mathbb{N}$ on note $p_k = P(X_n = k)$ et $F_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $M_n = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

   Pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer la probabilité $P(M_n \leqslant k)$. en fonction de F_k et n.

3. On suppose que μ est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, K\}$ où $K \geqslant 1$ entier.
   a) Déterminer $P(M_n = k)$ pour tout k dans $\{1, \dots, K\}$.
   b) On jette trois dés équilibrés. Quelle est la probabilité que le maximum des numéros obtenus soit 4 ?
4. On suppose maintenant que μ est la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
   a) Déterminer $E(M_n)$.
   b) Trois joueurs jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée et s'arrêtent dés qu'ils obtiennent pile. La variable aléatoire M_3 est alors le nombre de jet effectués par le ou les joueurs ayant obtenu pile en dernier. Déterminer $E(M_3)$.

Exercice 15

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $s = (s_1, \dots, s_p) \in \{0,1\}^p$.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\alpha \in]0,1[$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \{\omega \in \Omega / X_{np+1}(\omega) = s_1, X_{np+2}(\omega) = s_2, \dots, X_{(n+1)p}(\omega) = s_p\}$

Si E est un événement, on désignera par E^c son complémentaire dans l'univers Ω.

1. Justifier l'assertion : $\omega \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \Big(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i \Big) \Rightarrow s$ apparaît une infinité de fois dans $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots)$
2. Montrer que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.
3. Déterminer l'événement $\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Big(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i \Big) \Big)^c$.
4. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $P\Big(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c \Big) = 0$.
5. En déduire que $P\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \Big(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i \Big) \right) = 1$ et interpréter ce résultat.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant une variance σ^2 et centrée.

1. Démontrer que pour tout variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2 on a :
$$E(Y) \leqslant \sqrt{E(Y^2) P(Y > 0)}.$$
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $P(X \leqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.

Exercice 17

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables aléatoires T définies sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(T \geqslant n) > 0$.

Lorsque $T \in \mathcal{V}$ on note $u(T)$ la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = [u(T)]_n = P_{[T \geqslant n]}(T = n)$.

1. Montrer que si $T \in \mathcal{V}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $[u(T)]_n \in [0,1[$.
2. a) Si $T \in \mathcal{V}$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - u_k)$.
   b) Pour quels éléments T de $\mathcal{V}$ la suite $u(T)$ est-elle constante ?
3. Soit $T \in \mathcal{V}$. Montrer que la série $\sum [u(T)]_n$ est divergente.
4. Réciproquement, soit (u_n) une suite dans $[0,1[$ telle que la série $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :
$$p_n = u_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - u_k).$$
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - \prod_{k=0}^{n} (1 - u_k)$.
   b) Justifier alors qu'il existe une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(T \geqslant n) > 0$ et $u_n = P_{[T \geqslant n]}(T = n)$.