Feuille d'exercices n° 11. Séries entières. Quelques corrections

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.
2. $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
3. $\sum \cos(n)\, z^n$.
4. $\sum n^k z^n$ où $k \in \mathbb{N}$.
5. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$.
6. $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$.

Exercice 2

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n>1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 3
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{a_{n+2}}{a_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 4
Soit (a_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admette une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont même rayon de convergence.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$.

Exercice 5
Soit f une fonction continue sur $\overline{D}$ où $D = D(0,1) \subset \mathbb{C}$. On suppose que les a_n sont des réels positifs et que pour tout $z \in D$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge de somme $f(1)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1[$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f(x)$.

On fait tendre x vers 1 dans les deux membres de cette inégalité pour obtenir, par continuité de la fonction f sur $[0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant f(1).$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes partielles de **la série à termes positifs** $\sum a_k$ sont majorées par $f(1)$: cette série est convergente et on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leqslant f(1)$.

- Pour tout $x \in [0,1[$, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Ainsi $(x \to 1)$ donne : $f(1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Exercice 6

La fonction arcsin est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 7

Trouver par deux méthodes la solution de l'équation différentielle $(E)\ \ y' = x^2 + y$ telle que $f(0) = 0$

Exercice 8

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ et trouver sa fonction somme.

- Pour x non nul on pose $u_n = \dfrac{x^n}{(2n)!} \neq 0$. On a alors :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{(2n+1)(2n+2)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi la série $\sum u_n$ est absolument convergente et le rayon de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ est $R = +\infty$: notons f sa somme.

- Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

- Si $x \leqslant 0$ alors on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{-x}$.

Exercice 9

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = -\dfrac{1}{2}$? $x = \dfrac{1}{2}$?.

1. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b. Alors la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité dès que $R_a \neq R_b$.

2. On a :
   - $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ pour $|x| < 1$.
   - $\ln(1-2x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(2x)^{k+1}}{k+1}$ pour $|x| < \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi pour tout x tel que $|x| < \dfrac{1}{2}$, il vient : $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1} - 2^k}{k} x^k$.

   D'après la première question le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{2}$.

   Pour $x = \dfrac{1}{4}$, la série obtenue est absolument convergente donc convergente car $\left|\dfrac{1}{4}\right| < R$.

   Pour $x = \dfrac{1}{2}$ la série numérique $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1} - 2^k}{k} x^k$ est divergente comme somme d'une série convergente (celle issue de $\ln(1+x)$) et d'une série divergente (celle issue de $\ln(1-2x)$). Pour $x = -\dfrac{1}{2}$ la série numérique $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1} - 2^k}{k} x^k$ est convergente comme somme de deux séries convergente (celle issue de $\ln(1+x)$ et une série alternée.)

Exercice 10
Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$.

1. Pour $x \neq 1$ on a : $1+x+x^2 = \dfrac{1-x^3}{1-x}$. Ainsi pour $x \in]-1,1[$ il vient, comme $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ et que $\left|x^3\right| < 1$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x+x^2) &= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{où} \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{3}{n} & \text{si } n \text{ multiple de } 3 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Pour $x \in]-1,1[$ on a $1+x+x^2+x^3+x^4 = \dfrac{1-x^5}{1-x}$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} &= \frac{1-x}{1-x^5} = (1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k} - \sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{où} \quad a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \ [5] \\ -1 & \text{si } k \equiv 1 \ [5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 11
On considère $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini de fonction somme f.

1. Démontrer que pour tout $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a : $\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a_n r^n$.

2. On suppose que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels strictement positifs α_k et β_k tels que :
$$(\forall z \in \mathbb{C})(|f(z)| \leqslant \alpha_k |z|^k + \beta_k.$$
Que dire de f ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{ip\theta} e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\,d\theta$$
Mais pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout θ dans $[0, 2\pi]$ on a : $\left|a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\right| \leqslant |a_p|\, r^p$.
Comme la série $\sum_{p\geqslant 0} |a_p|\, r^p$ converge puisque $r < R$, la série de fonction $\sum_{p\geqslant 0} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$ converge normalement donc uniformément en θ sur $[0, 2\pi]$. On peut alors intervertir les symboles $\int$ et $\sum$.
Il vient :
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)}\,d\theta\right)}_{=2\pi\delta_p^n} \\ &= 2\pi a_n r^n\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente on a, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta$.
Fixons provisoirement $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}$. On a alors :
$$|a_n|\, r^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_k r^k + \beta_k\,d\theta = \alpha_k r^k + \beta_k.$$
Cette dernière inégalité est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Si $n > k$ on a donc, pour tout $r > 0$:
$$|a_n| \leqslant \alpha_k r^{k-n} + \beta_k r^{-n} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi $a_n = 0$ pour tout $n > k$: $\underline{f \text{ est une fonction polynôme}}$.

Exercice 12
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$, et f sa fonction somme.

1. Démontrer que pour tout $r \in]0, 1[$ on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
2. En déduire que si f est bornée alors la série $\sum |a_n|^2$ est convergente.

Exercice 13
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa fonction somme. Pour $r \in]0, R[$ et Z complexe tel que $|Z| < r$ on pose :
$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - Z}\,d\theta$$
Démontrer que $f(Z) = I(r)$.

Exercice 14
On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} z^n$, une série entière de rayon de convergence infini de fonction somme f, telle que $f(0) = 1$. On suppose que $a_n \in \{-1, 1\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\left|f^{(p)}(x)\right| \leqslant 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$. Déterminer f.

• Supposons un instant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p = a_{p+1}$. La fonction f est C^∞ et on a, pour $x \geqslant 0$ réel :

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+p}}{n!} x^n = a_p + a_{p+1}x + x \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n+p}}{n!} x^{n-1}}_{=\varepsilon(x)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, il existe $A > 0$ réel tel que pour tout $x \in [0, A]$ on ait : $|\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Soit $x \in]0, A]$. On a alors $-\dfrac{x}{2} \leqslant x\varepsilon(x) \leqslant \dfrac{x}{2}$. Envisageons deux cas.

• **Cas 1**. On suppose $a_p = a_{p+1} = 1$. Il vient alors :

$$1 + \frac{x}{2} \leqslant f^{(p)}(x) \leqslant 1 + \frac{3x}{2}.$$

Ainsi $\left|f^{(p)}(x)\right| > 1$, ce qui est absurde.

• **Cas 2**. On suppose $a_p = a_{p+1} = -1$. Il vient alors :

$$-1 - \frac{3x}{2} \leqslant f^{(p)}(x) \leqslant -1 - \frac{x}{2}.$$

On retrouve la stupidité $\left|f^{(p)}(x)\right| > 1$.

• Selon ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -a_n$. Comme $a_0 = 1$ (puisque $f(0) = 1$) on peut donc dire que $f(z) = \mathrm{e}^{-z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Exercice 15

Soient D le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, continue, telle que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour z dans D. On suppose que $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge de somme $f(1)$ (c'est une théorème de Tauber).

Aide : on pourra considérer les suites $x_N = 1 - \dfrac{1}{N}$ et $v_N = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$.

• Pour $N \geqslant 2$ on pose : $x_N = 1 - \dfrac{1}{N}$ et $v_N = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$.

Par continuité de f on a $f(x_N) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(1)$ i.e. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n = f(1)$. On veut donc montrer que :

$$\exists \lim_{N\to+\infty} v_N = 0.$$

• Pour $N \geqslant 2$ on a :

$$v_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x_N^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x_N^n).$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x_N^n\right| &= \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} na_n \frac{x_N^n}{n}\right| \\
&\leqslant \mu_N \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x_N^n}{n} \quad \text{où } \mu_N = \sup_{n>N} |na_n| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\leqslant \frac{\mu_N}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x_N^n \leqslant \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1 - x_N} \\
&\leqslant \mu_N
\end{aligned}$$

Puis si $1 \leqslant n \leqslant N$ on a : $1 - x_N^n = (1 - x_N)(1 + x_N + \cdots + x_N^{n-1}) \leqslant n(1 - x_N) \leqslant \dfrac{n}{N}$ donc il vient :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x_N^n)\right| \leqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N} |na_n|\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(via le théorème de Césaro)}$$

ce qui prouve le résultat souhaité. $\square$