Feuille d'exercices n° 11. Séries entières

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.
2. $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
3. $\sum \cos(n)\, z^n$.
4. $\sum n^k z^n$ où $k \in \mathbb{N}$.
5. $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$.
6. $\sum \dfrac{\sin n}{n} z^n$.

Exercice 2

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n>1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 3
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{a_{n+2}}{a_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 4
Soit (a_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admette une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont même rayon de convergence.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$.

Exercice 5
Soit f une fonction continue sur $\overline{D}$ où $D = D(0,1) \subset \mathbb{C}$. On suppose que les a_n sont des réels positifs et que pour tout $z \in D$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge de somme $f(1)$.

Exercice 6
La fonction arcsin est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 7
Trouver par deux méthodes la solution de l'équation différentielle $(E)\quad y' = x^2 + y$ telle que $f(0) = 0$

Exercice 8
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ et trouver sa fonction somme.

Exercice 9
1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction
$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = \frac{1}{2}$?.

Exercice 10
Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes.
1. $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}$.

Exercice 11
On considère $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini de fonction somme f.
1. Démontrer que pour tout $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a : $\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi a_n r^n$.
2. On suppose que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels strictement positifs α_k et β_k tels que :
$$(\forall z \in \mathbb{C})(|f(z)| \leqslant \alpha_k |z|^k + \beta_k.$$
Que dire de f ?

Exercice 12
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$, et f sa fonction somme.
1. Démontrer que pour tout $r \in]0,1[$ on a : $\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
2. En déduire que si f est bornée alors la série $\sum |a_n|^2$ est convergente.

Exercice 13
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa fonction somme. Pour $r \in]0, R[$ et Z complexe tel que $|Z| < r$ on pose :
$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{i\theta} f(r\mathrm{e}^{i\theta})}{r\mathrm{e}^{i\theta} - Z} \, \mathrm{d}\theta$$
Démontrer que $f(Z) = I(r)$.

Exercice 14
On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$, une série entière de rayon de convergence infini de fonction somme f, telle que $f(0) = 1$. On suppose que $a_n \in \{-1, 1\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\left|f^{(p)}(x)\right| \leqslant 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$. Déterminer f.

Exercice 15
Soient D le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, continue, telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour z dans D. On suppose que $\exists \lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge de somme $f(1)$ (c'est une théorème de Tauber).

Aide : on pourra considérer les suites $x_N = 1 - \frac{1}{N}$ et $v_N = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n - \sum_{n=0}^{N} a_n$.