Feuille d'exercices n° 10. Séries de fonctions.
Quelques corrections

Exercice 4
Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R > 0$?

1. • La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur X lorsque, par définition, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_{\infty,X}$ converge.

   • série de fonctions $\sum f_n$ ***converge uniformément*** sur X vers une fonction $S : X \to \mathbb{C}$ lorsque $S_n \xrightarrow[X]{CU} S$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.
2. Voir le cours...
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ posons : $u_n(x) = \frac{n^2}{n!} z^n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$ on a :
   $$|u_n(z)| = \frac{n^2}{n!} |z|^n \leqslant \underbrace{\frac{n^2}{n!} R^n}_{\text{indépendant de} z} .$$
   Ainsi (la borne supérieure étant le plus petit des majorants) on a
   $$\|u_n\|_{\infty,\overline{D}_R} \leqslant \frac{n^2}{n!} R^n,$$
   qui est le terme général d'une série convergente (par exemple par le critère de d'Alembert). Il en résulte que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\overline{D}_R$.

Exercice 5
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série de fonctions.
   On note D l'ensemble des x réels où cette série de fonctions converge et pour x dans D, $S(x)$ la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$.
2. a) Étudier la convergence normale puis uniforme de cette série de fonctions sur D.
   b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Exercice important

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   — On suppose que $|x| > 1$. On a alors : $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{+} \infty$ par croissances comparées. Ainsi, la série numérique $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
   — On suppose que $|x| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors : $|u_n(x)| \leqslant x^n$ qui est le terme général d'une série convergente (série géométrique). Par domination, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.
   — Si $x = -1$, on a $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on sait que la série harmonique diverge.
   — Si $x = 1$, la suite $(1/n)$ décroit vers 0 : on peut appliquer **le critère spécial des séries alternées** pour affirmer que la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D} =]-1, 1]$

2. a) • Soit $a \in [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a, a]$ on a :

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leqslant \underbrace{|a|^n}_{\text{indépendant de } x}.$$

   Ainsi (par passage à la borne supérieure qui est le plus petit des majorants) on a :

$$\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant a^n.$$

   Comme la série $\sum a^n$ converge (série géométrique : $|a| < 1$), la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

   • Selon le point précédent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[-a, a]$ avec $|a| < 1$.

   • Supposons un instant que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$.
   Comme pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$, le théorème de la double limite affirme alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ converge, ce qui est profondément stupide !
   Ainsi la série de fonction $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathcal{D} =]-1, 1]$.

   • Supposons maintenant que $x \in [0, 1]$. La suite $|u_n(x)|$ est décroissante de limite nulle. Ainsi **le critère spécial des séries alternées** s'applique et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$, on a :

$$|R_n(x)| \leqslant |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

   Ainsi $\|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par sandwich, la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ est est assuré qu'elle y converge uniformément.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a, 1]$ dès que $a \in [0, 1[$.

   b) Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a, 1]$ dès que $a \in [0, 1[$, la fonction somme S y est continue, puisque chaque u_n l'est. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $a \in\in [0, 1[$, S est continue sur $\mathcal{D} =]-1, 1]$.

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$ réel on pose $g_n(x) = \dfrac{x}{n(nx+1)}$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum g_n$. On note alors G la fonction somme de cette série de fonctions.
2. Démontrer que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   — Si $x = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $g_n(x) = 0$ donc la série numérique $\sum g_n(0)$ converge, de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(0) = 0$.
   — Si $x > 0$, on a : $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{xn^2} = \frac{1}{n^2} \boxed{\geqslant 0}$. Comme la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est convergente (Riemann : $2 > 1$), la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est convergente.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. • Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ comme fraction rationnelle qui ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour $x \geqslant 0$ on a :
$$g_n'(x) = \frac{n(nx+1) - n^2x}{n^2(nx+1)^2} = \frac{1}{n(nx+1)^2}.$$
   • Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant a$ on a :
$$|g_n'(x)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{n(na+1))^2}}_{\text{indépendant de } x},$$
   donc $\|g_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n(na+1))^2}$ (puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants). Comme $\frac{1}{n(na+1))^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3a^2} \boxed{\geqslant 0}$, $\frac{1}{n(na+1))^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente. Par domination la série de fonction $\sum g_n'$ converge normalement donc **converge uniformément** sur $[a,+\infty[$.

   Le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction G est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai quelque soit le choix de $a > 0$, G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, avec, pour tout $x > 0$:
$$G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx+1)^2}.$$

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{(x+n)\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On notera f la fonction somme.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$.
3. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
5. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. *On pourra pour cela prouver la minoration : pour tout $x \geqslant n$,* $f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
6. Démontrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Si $x=0$, on a $f_n(x)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge de somme 0.

   • Si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n\sqrt{n}} \boxed{\geqslant 0}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann), il en va de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2. Soient a et b des réels tels que $0<a<b$. Pour tout $x\in[a,b]$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$|f_n(x)| \leqslant \underbrace{\frac{b}{(a+n)\sqrt{n}}}_{\text{indépendant de } x}.$$

   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{b}{(a+n)\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série convergente (Riemann). Il en résulte que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ est convergente.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$.

3. Soient a et b des réels tels que $0<a<b$. Puisque chaque f_n est continue sur $]0,+\infty[$ (comme fraction rationnelle définie sur cet intervalle) et comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément (car normalement) sur $[a,b]$, la fonction f est continue sur $[a,b]$.

   Ceci étant valable quelque soit le choix de a et b tels que $0<a<b$, on peut conclure que f est continue sur $]0,+\infty[$.

4. • Soit $n\geqslant 1$ entier. La fonction f_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ (comme fraction rationnelle définie sur cet intervalle). Pour tout $x\geqslant 0$ on a :

$$f_n'(x)=\frac{(x+n)\sqrt{n}-x\sqrt{n}}{n(x+n)^2}=\frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}.$$

   • Pour tout $x\in[0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $|f_n'(x)| \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{n^{3/2}}}_{\text{indépendant de } x}$, donc : $\|f_n'\|_{\infty,[0,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$, qui est le terme général d'une série convergente (Riemann).
   Il en résulte que la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,+\infty[$.

   De là, la fonction est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ avec, pour $x\geqslant 0$, $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}$.

5. • Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant n$. Pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$ on a $2x\geqslant x+k>0$ donc $\dfrac{1}{2x}\leqslant\dfrac{1}{x+k}$ et ainsi :

$$f_k(x)=\frac{x}{(x+k)\sqrt{k}} \geqslant \frac{x}{2x\sqrt{k}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

   Alors : $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\underbrace{f_k(x)}_{\geqslant 0} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

   • Soit $A>0$. Comme $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant N$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}} \geqslant A.$$

Ainsi, si $x \geqslant N$, il vient : $f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geqslant A$.
Par définition : $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. Pour $x > 0$ on pose $g_n(x) = \frac{1}{x} f_n(x) = \frac{1}{(x+n)\sqrt{n}}$.

   Alors :

   — La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $x \mapsto g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $g_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} = 0$.

   — La série de fonction $\sum_{n \geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (convergence normale en fait, facile à établir)

   Le théorème de la double limite s'applique : $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 8
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$.
On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

1. a) Prouver que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose pour x réel : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ convergence-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

   c) La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ convergence-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.

1. a) On sépare les cas $x = 0$ et $x \neq 0$...

   b) • Pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{b}{1 + n^4 a^4} \leqslant \underbrace{\frac{b}{a^4 n}}_{\text{indépendant de } x}.$$

   Ainsi il vient $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b}{a^4 n}$. Comme la série de terme général $\frac{b}{a^4 n}$ est convergente (Riemann), par domination, la série $\sum_{n \geqslant 1} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

   Conclusion. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

   • On étudie, à n fixé dans $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. la fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ (fraction rationnelle qui ne s'annule pas sur cet intervalle). Pour $x \geqslant 0$ on a :

$$f_n'(x) = \frac{(1 + n^4 x^4) - 4n^4 x^4}{(1 + n^4 x^4)^2} = \frac{1 - 3n^4 x^4}{(1 = n^4 x^4)^2}.$$

   Ainsi $f_n'(x)$ est du signe de $1 - 3n^4 x^4$ et donc atteint un maximum en $x_n = \frac{1}{3^{1/4} n}$ qui est :

$$f_n(x_n) = \frac{x_n}{1 + 1/3} = \frac{3}{4 \times 3^{1/4} n},$$

la fonction f_n étant décroissante sur $[x_n, +\infty[$.

Comme $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $x_n \leqslant a$. Le maximum $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ de f_n sur l'intervalle $[a, +\infty[$, qui y est positive, est alors $f_n(a)$ pour tout $n \geqslant N$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge (première question), donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

c) L'étude de fonction précédente montre que $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty]} = \dfrac{3}{4 \times 3^{1/4} n}$. Comme la série harmonique diverge, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1 f_n}$ converge normalement donc uniforme sur tout segment de $]0, +\infty[$ et chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) : la fonction somme f est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^*$ puisque f est une fonction paire.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^4 x^4} = \dfrac{1}{n^4 x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_n = 0$.
Comme la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, le théorème de la double limite s'applique : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ell_n$ converge (on le savait !) et il vient :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 0.$$

Exercice 9
Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$, calculer : $I = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it} - z}\, \mathrm{d}t$.

- Supposons $|z| < 1$. On a alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it} - z}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - z\mathrm{e}^{-it}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t.$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2, \pi]$, on a $\left|z^n \mathrm{e}^{-int}\right| \leqslant |z|^n$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ converge, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n \mathrm{e}^{-int}$ converge normalement en t sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut donc intervertir les symboles $\displaystyle\int$ et $\sum$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it} - z}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_n^0} = 2\pi.$$

Ainsi $I = 1$.

- Supposons $|z| > 1$. On a alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it} - z}\, \mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{z^{-1}\mathrm{e}^{it}}{z^{-1}\mathrm{e}^{it} - 1}\, \mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{1=0}^{+\infty} z^{-n} \mathrm{e}^{-int}}_{CN\ en\ t\ sur\ [0,2\pi]} \mathrm{d}t = \sum_{1=0}^{+\infty} z^{-n} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t}_{=0} = 0$$

Dans ce cas, $I = 0$.

Exercice 10
Soit $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$, où $u_n(x) = \dfrac{a_n x^n}{n!}$, converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. Pour le lecteur...
2. Puisque la série $\sum a_n$ est convergente, la suite (a_n) tend vers 0 à l'infinie donc est bornée par un réel $M \geqslant 0$. Pour a réel et x dans $[-a, a]$ on a donc :
$$\left|\frac{a_n x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{M a^n}{n!}.$$
Comme $\dfrac{M a^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (de somme $M\mathrm{e}^a$), la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$: elle converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ et la fonction somme est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour $x \geqslant 0$ réel on a $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}$. Pour n entier et $x \geqslant 0$ on pose $g_n(x) = \dfrac{a_n x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}$. Les fonction g_n sont continues et intégrables sur $[0, +\infty[$ puisque :
$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n! \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction g et on a pour $x \geqslant 0$:
$$|g_n(x)| = |a_n|\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x},$$
donc $\displaystyle\int_I |g_n(x)| = |a_n|\,\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = |a_n|$. Il en résulte que la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.
On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme s'applique : la fonction g est intégrable, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge avec
$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 11

1. Soit $x > 0$. Exprimer sous forme de série $\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on pose $f_n(x) = (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nx}\cos x$.
   a) Montrer que chaque f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$
   b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} |f_n|$?

c) En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonction (S_n) où $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{(k^2+1)}.$$

1. Pour tout $x > 0$ on a (série géométrique) :

$$\frac{\cos x}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \cos x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} \cos x.$$

2. a) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

   - La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $t > 0$ on a : $|f_n(t)| \leqslant e^{-nt}$.
   Or la fonction $t \mapsto e^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (intégrale de référence !) donc f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ par domination.

   b) Soit $n \geqslant 1$ entier. Calculons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, dt &= \int_0^{+\infty} e^{-nt} \cos t \, dt = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-nt} e^{it} \, dt\right) = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-n)t} \, dt\right) \\
&= \Re\left(\left\{\frac{e^{(i-n)t}}{i-n}\right]_0^{+\infty}\right) = \Re\left(-\frac{1}{i-n}\right) = \Re\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right) \\
&= \frac{n}{n^2+1}
\end{aligned}$$

   Comme $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n} \boxed{\geqslant 0}$ et que la série harmonique diverge, on peut conclure que la série $\sum_{n \geqslant 1} \int_0^{+\infty} |f_n|$ est divergente.

   c) Pour tout $t > 0$ réel on a $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e^{-kt} \cos t = \frac{e^{-t} - (-1)^n e^{-(n+1)t}}{1 + e^{-t}} \cos t$ donc :

$$S_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} \cos t = S(t)$$

   Ainsi (S_n) est une suite de fonction continues sur $]0, +\infty[$ qui vérifie :

   — $(S_n) \underset{]0,+\infty[}{\overset{CS}{\longrightarrow}} S$ avec S continue sur $]0, +\infty[$

   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|S_n(t)| \leqslant 2\frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} = \varphi(t)$.
   Mais la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $A > 0$ on a :

$$\int_0^A \varphi(t) \, dt = -2\left\{\ln(1 + e^{-t})\right]_0^A = -2(\ln(1 + e^{-A}) - \ln 2) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 2\ln 2.$$

   Comme φ est positive, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$

   Le théorème de convergence dominée s'applique : S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} S_n(t) \, dt \underset{+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} S(t) \, dt,$$

   ce qui se traduit par $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1}$. Enfin, le même calcul que ci-dessus amène $\int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt = (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.

Exercice 12
Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13
Soient $r \in]0,1[$, θ réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. On pose $A_r(\theta) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}$ et :

$$P_r(f,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta} \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Démontrer que $A_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$.
2. Démontrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} A_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1$.
3. Démontrer que $P_r(f,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta-u)A_r(u)\,\mathrm{d}u$.
4. Démontrer que $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} P_r(f,\theta) = f(\theta)$, la convergence étant uniforme en θ.

1. On a :

$$\begin{aligned}
A_r(\theta) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n\theta = 1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{in\theta}\right) = 1 + 2\Re\left(\frac{r\mathrm{e}^{i\theta}}{1-r\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \\
&= 1 + \frac{2r}{|1-r\mathrm{e}^{i\theta}|^2}\Re\left(\mathrm{e}^{i\theta}(1-r\mathrm{e}^{i\theta})\right) = 1 + \frac{2r\cos(\theta - r)}{1+r^2-2r\cos\theta} \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}
\end{aligned}$$

   On peut noter que A_r prends des valeurs positives.

2. Par convergence normale en θ sur $[0,2\pi]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}$ (notez que (a_n) est bornée puisque f est bornée), il vient :

$$\int_0^{2\pi} A_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{2\pi\delta_n^0} = 2\pi$$

3. Toujours par convergence normale on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(\theta-t)A_r(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_0^{2\pi} f(\theta-t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_0^{2\pi} f(u)\mathrm{e}^{in(\theta-u)}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(u)\mathrm{e}^{-in(u)}\,\mathrm{d}u}_{=2\pi a_n}
\end{aligned}$$

   Ainsi $P_r(f,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta-t)A_r(t)\,\mathrm{d}t$ (formule de Poisson)

4. **Théorème de Poisson**.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Soient $r \in]0,1[$ et θ réel. On a, d'après la question 2, et par « intégrales de périodes » :

$$P_r(f,\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta-t) - f(\theta)\right)A_r(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta-t)-f(\theta)\right)A_r(t)\,\mathrm{d}t.$$

   De là $|P_r(f,\theta) - f(\theta)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(\theta-t)-f(\theta)|\,A_r(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $\eta > 0$ tel que les relations $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $|u-v| \leqslant \eta$ impliquent $|f(u)-f(v)| \leqslant \varepsilon$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
|P_r(f,\theta) - f(\theta)| &\leqslant \varepsilon \times \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} A_r}_{\leqslant 1} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\left(\int_\eta^\pi A_r + \int_{-\pi}^{-\eta} A_r\right) \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\eta^\pi A_r \quad \text{puisque } A_r \text{ est paire.}
\end{aligned}$$

Enfin la fonction cos décroît strictement sur $[0,\pi]$ donc pour tout t dans $[eta,\pi]$ on a :

$$0 < A_t(t) < \frac{1-r^2}{1+r^2-2\cos\eta}.$$

Ainsi $\|P_r(f,\theta) - f(\theta)\|_\infty \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2\cos\eta}$.

Comme $\dfrac{1-r^2}{1+r^2-2\cos\eta} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ on obtient le résultat souhaité. □

Exercice 14

On considère la série série de fonction $\sum u_n$ où $u_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Etudier le domaine de convergence D de cette série de fonctions. On appellera U la fonction somme.
2. Démontrer que U est continue sur D.
3. Démontrer que $U(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. *On pourra utiliser le fait que la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge de somme* $-\ln 2$.
4. Soit $t > 0$ réel. On considère la fonction $\varphi_t : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie, pour $u \geqslant 0$, par :

$$\varphi_t(u) = \frac{1}{(t+2u)(t+2u+1)}.$$

   a) Justifier que φ_t est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $I(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \varphi_t(u)\,du$.

   b) Démontrer que : $tI(t) \leqslant U\left(\dfrac{1}{t}\right) \leqslant tI(t) + \dfrac{1}{t+1}$.

   c) Démontrer que $U(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

1. Le critère spéciale des séries alternées donne de suite $D \supset]0,+\infty[$. Mais pour $x=0$, on a $u_n(0) = (-1)^n$ donc $0 \notin D$. Ainsi $D =]0,+\infty[$.

2. Pour tout n entier, on a $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+nx} \leqslant \dfrac{1}{1+na}$ dès que $x \geqslant a$. Ainsi $R_n \underset{[a,+\infty[}{\overset{CU}{\longrightarrow}} 0$.

   Ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur les segments de $]0,+\infty[$: la fonction somme U est ainsi continue sur $]0,+\infty[$, puisque chaque u_n est C^0.

3. Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
U(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{1+nx} - \frac{1}{nx}\right] \\
&= \underbrace{\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}}_{=-\ln 2} + \underbrace{\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(nx+1)}}_{=\varepsilon(x)}
\end{aligned}$$

   Mais $|\varepsilon(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx+1)} \leqslant \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6x}$, d'où le résultat.

4. a) La fonction φ_t est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $\varphi_t(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4u^2} \geqslant 0$.

Comme $u \mapsto \dfrac{1}{4u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut conclure que φ_t est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) On a :

$$U(1/t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n/t} = t\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$$

Mais pour N entier naturel on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{t+n} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{t+2n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{t+2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(t+2n)(t+2n+1)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+2n)(t+2n+1)}\end{aligned}$$

Ainsi $U(1/t) = t\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_t(n)$.

La fonction φ_t étant décroissante, sur $\mathbb{R}^+$, on a pour tout k dans $\mathbb{N}$ et t dans $[k, k+1]$: $\varphi_t(k+1) \leqslant \varphi_t(u) \leqslant \varphi_t(k)$ donc :

$$\varphi_t(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \varphi_t(k).$$

Par somme, pour tout $N \geqslant 1$ entier, il vient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi_t(k+1) \leqslant \int_0^N \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_t(\varphi_t(k).$$

De là $(N \to +\infty)$ il vient correctement :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_t(k+1)}_{=\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_t(k) - \varphi_t(0)} \leqslant \underbrace{\int_0^{+\infty} \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u}_{=I(t)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_t(k).$$

et ainsi : $I(t) \leqslant \dfrac{1}{t}U(1/t) \leqslant I(t) + \dfrac{1}{t(1+t)}$.

c) Avec l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que $tI(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Pour tout $A > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^A \frac{t+2u}{\mathrm{d}}u - \int_0^A \frac{t+2u+1}{\mathrm{d}}u \\ &= \frac{1}{2}\left\{\ln(t+2u) - \ln(t+2u+1)\right]_0^A \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t+2A}{t+2A+1} + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\end{aligned}$$

De là $tI(t) = \dfrac{1}{2}\,t\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. $\square$