

Feuille d'exercices n° 9. Probabilités I. Quelques corrections

Exercice 3 (Jeu de Pile ou Face)

Un petit joueur joue à pile ou face avec deux pièces équilibrées de la manière suivante : il lance simultanément les deux pièces.

- S'il n'obtient aucun pile son gain est nul et la partie s'arrête.
- S'il obtient au moins un pile, il relance simultanément les deux pièces autant de fois qu'il a obtenu pile au premier lancer ; son gain est alors (en roros) le nombre de piles obtenu lors de cette deuxième série de jets.

1. Déterminer la probabilité que son gain soit nul.
2. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu deux piles au premier lancer sachant qu'il a obtenu un seul pile à la seconde étape.

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de pile obtenu au premier lancer de pièces. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec :

$$\begin{cases} P(X = 0) &= 1/4 \\ P(X = 1) &= 1/2 \\ P(X = 2) &= 1/4 \end{cases}$$

On note G la variable aléatoire qui donne le gain du joueur. On a $G(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On cherche à calculer $P(G = 0)$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X . On a :

$$\begin{aligned} P(G = 0) &= P(G = 0, X = 0) + P(G = 0, X = 1) + P(G = 0, X = 2) \\ &= P(X = 0) \underbrace{P_{[X=0]}(G = 0)}_{=1} + P(X = 1) \underbrace{P_{[X=1]}(G = 0)}_{=\frac{1}{4}} + P(X = 2) \underbrace{P_{[X=2]}(G = 0)}_{=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Le reste est pour le lecteur.

2. On cherche ici $P_{[G=1]}(X = 2) = \frac{P(G = 1, X = 2)}{P(G = 1)} = \frac{P(X = 2)P_{[X=2]}(G = 1)}{P(G = 1)}$.

La probabilité $P(G = 1)$ se calcule avec la formule des probabilités totales :

$$P(G = 1) = P(G = 1, X = 0) + P(G = 1, X = 1) + P(G = 1, X = 2).$$

et la probabilité conditionnelle $P_{[X=2]}(G = 1)$ est égale à $2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leq e^{-x}$.
2. On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!). Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...
- a) Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, E_2, \dots, E_\ell$ une famille de ℓ événements indépendants. Montrer que l'on a

$$P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq \ell} \overline{E_i}\right) \leq e^{-\sum_{i=1}^{\ell} P(E_i)}.$$

où $\overline{E}$ est l'événement contraire de l'événement E .

- b) On note A_k l'événement « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ». Que vaut la probabilité de A_k ?
- c) Quelle est la probabilité que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage, où n est un entier positif fixé ?

- d) Quelle est la probabilité que la boule numérotée 10 sorte une infinité de fois ?
- e) Calculer la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite.
3. On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2 , le $n^{\text{ème}}$ jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées 2, 3, 4 le deuxième jour, cinq boules le troisième, ...). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne.
- Quelle est la probabilité que le nombre 10 sorte une infinité de fois ?

1. Par inégalité de convexité ou étude de fonction, on a de suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^+ : 1 - x \leq e^{-x}$.
2. On peut modéliser l'expérience de la manière suivante. Une issue est une suite $\omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, où ω_k est le numéro de la boule tirée le k -ième jour.

- a. Comme les événements $E_1, \dots, E_\ell$ sont indépendants, il en va de même des événements $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_\ell$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq \ell} \overline{E}_i\right) &= \prod_{i=1}^{\ell} P(\overline{E}_i) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 - P(E_i)) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell} e^{-P(E_i)} \text{ d'après la première question} \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{\ell} P(E_i)\right) \end{aligned}$$

- b. Si $k \in \{1, \dots, 9\}$, il n'y a pas de boule portant le numéro 10 dans l'urne. Ainsi $P(A_k) = 0$. Si maintenant $k \geq 10$, il y a une boule portant le numéro 10 dans l'urne le k -ième jour. Il en résulte que $P(A_k) = \frac{1}{k}$.

Conclusion. On a $P(A_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k \leq 9 \\ \frac{1}{k} & \text{si } k \geq 10 \end{cases}$.

Commentaire. Notons que $\omega \in A_k$ lorsque le k -ième terme de la suite ω est $\omega_k = 10$.

- c. Soit $n \geq 1$ entier. L'événement E_n : « la boule 10 sorte au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage » est :

$$B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

En effet, pour ω issue de l'expérience, on a :

$$\omega \in B_n \Leftrightarrow (\exists k \geq n)(\omega_k = 10) \Leftrightarrow (\exists k \geq n)(\omega \in A_k).$$

Mais, selon une conséquence du théorème de convergence monotone, on a :

$$P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right).$$

Mais, pour $m \geq n$, $\overline{\bigcup_{k=n}^m A_k} = \bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}$ (formules de Morgan). D'après les questions 2a et 2b, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=\max(n,10)}^m \frac{1}{k}\right).$$

Or $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=\max(n,10)}^m \frac{1}{k} = +\infty$ (la série harmonique diverge). Par sandwich, il vient :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) = 0.$$

Ainsi $\lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) = 1$.

Conclusion. La boule 10 sort au moins une fois presque sûrement.

d. L'événement « la boule numérotée 10 sort une infinité de fois » est $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$.

En effet, si ω est une issue de l'expérience, on a :

$$\begin{aligned} \omega \in E &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists k \geq n)(\omega_k = 10) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)(\omega \in B_n) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \end{aligned}$$

Mais la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion. Le théorème de convergence monotone affirme que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P(F).$$

Or on a vu que $P(B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que $P(F) = 1$.

Conclusion. Le 10 sort presque sûrement une infinité de fois.

e. Soit G l'événement « le 10 sort une infinité de fois de suite ». Pour ω issue de l'expérience, on a donc :

$$\begin{aligned} \omega \in G &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*)(\forall k \geq n)(\omega_k = 10) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*)(\forall k \geq n)(\omega \in A_k) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*) \left(\omega \in \bigcap_{k \geq n} A_k \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $C_n = \bigcap_{k \geq n} A_k$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Le théorème de convergence monotone dit alors que :

$$P(G) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n).$$

Mais $C_n \subset A_n$, donc $P(C_n) \leq P(A_n) \xrightarrow{+\infty} 0$. Par sandwich, $P(C_n) \xrightarrow{+\infty} 0$.

Conclusion. La probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite est nulle.

3. Il s'agit de calculer la probabilité de $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$; par croissance des mesures de probabilités et sous-additivité, il vient :

$$P(F) \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \xrightarrow{+\infty} 0 \text{ (reste d'une série convergente).}$$

Exercice 7

On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne numérotée k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le $n + 1$ -ième tirage donne une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages on a obtenu une boule rouge ?
2. Déterminer la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de cette probabilité.

1. On peut modéliser une issue de cette expérience jusqu'au $n + 1$ -ème tirage par un élément $(i, x_1, \dots, x_{n+1})$ de l'ensemble $\{0, \dots, N\} \times \{B, R\}^{n+1}$, où i donne le numéro de l'urne choisie (dans $\{0, \dots, N\}$) et, pour k dans $\{1, \dots, n + 1\}$, $x_k = B$ si la boule tirée au k -ième tirage est Blanche et R sinon. L'univers (espace des états) de l'expérience est donc :

$$\Omega = \{0, \dots, N\} \times \{B, R\}^{n+1}.$$

On prend comme tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Appelons R_n l'événement : « on obtient n boules rouges lors des n premiers tirages » et A_{n+1} l'événement : « la $(n + 1)$ -ième boules tirées est rouge ». On a alors

- $R_n = \{0, \dots, N\} \times \{R\}^n \times \{R, B\}$;
- $R_{n+1} = \{0, \dots, N\} \times \{R\}^{n+1}$;
- $A_{n+1} = \{0, \dots, N\} \times \{R, B\}^n \times \{R\}$.

On cherche $P_{R_n}(A_{n+1}) = \frac{P(A_{n+1} \cap R_n)}{P(R_n)} = \frac{P(R_{n+1})}{P(R_n)} (\clubsuit)$.

Appelons maintenant, pour $i \in \{0, \dots, N\}$, U_i l'événement « l'urne choisie porte le numéro i ». Les événements $U_0, \dots, U_N$ forment un système complet d'événements de Ω . La formule des probabilités totales affirme alors que :

$$P(R_n) = \sum_{i=0}^N P(R_n \cap U_i) = \sum_{i=0}^N P(U_i) P_{U_i}(R_n).$$

Mais on a $P(U_i) = \frac{1}{N + 1}$ et $P_{U_i}(R_n) = \left(\frac{i}{N}\right)^n$ ce qui amène :

$$P(R_n) = \frac{1}{N + 1} \sum_{i=0}^N \left(\frac{i}{N}\right)^n.$$

On obtient, de la même manière, $P(R_{n+1}) = \frac{1}{N + 1} \sum_{i=0}^N \left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}$. Avec $(\clubsuit)$, on obtient :

$$P_{R_n}(A_{n+1}) = \frac{\sum_{i=0}^N \left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{i=0}^N \left(\frac{i}{N}\right)^n}.$$

2. On a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N + 1} \sum_{i=0}^N \left(\frac{i}{N}\right)^n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n + 1}$ (somme de Riemann).

De même $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N + 1} \sum_{i=0}^N \left(\frac{i}{N}\right)^{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n + 2}$. Il vient donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_{R_n}(A_{n+1}) = \frac{n + 1}{n + 2}.$$

Exercice 8

Un animal se déplace entre trois points d'eau A, B et C . À l'instant $t = 0$, il se trouve en A . Lorsqu'il a bu toute l'eau d'un point, il se déplace vers l'un des deux autres avec la même probabilité. On considère que l'eau se régénère après qu'il soit parti du point d'eau. On note pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_n = P(\text{« l'animal est en } A \text{ à } t = n \text{ »}) \\ b_n = P(\text{« l'animal est en } B \text{ à } t = n \text{ »}) \\ c_n = P(\text{« l'animal est en } C \text{ à } t = n \text{ »}) \end{cases}$$

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n . De même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

2. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

- a) Justifier que A est diagonalisable.
- b) Justifier que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A .
- c) Trouver D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

3. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement : « L'animal est au point A à l'instant n ». De même on considère les événements B_n et C_n où...

Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= 0 + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

De la même manière, en notant X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on a trouvé : $X_{n+1} = AX_n$, où A est la matrice de la question suivante.

2. a) La matrice A est symétrique réelle, donc (orthogonalement) diagonalisable selon le théorème spectral.

- b) La matrice $B = A + \frac{1}{2}I$ est de rang 1 : ainsi (théorème du rang), $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension 2. De plus, comme les colonnes de B sont toutes égales, $\ker(A + \frac{1}{2}I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

- c) La somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1 donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ainsi 1 est valeur propre de A et l'espace propre associé est la droite $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Avec la question précédente, on a donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Avec les notations introduites à la question 1, si pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = A^n X_0$ alors $X_{n+1} = AX_n = A^{n+1}X_0$. Comme $X_0 = A^0 X_0$ on peut conclure par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $X_n = A^n X_0$.

Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ il suffit de connaître A^n et on a deux méthodes.

- **Première méthode.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et on détermine alors P^{-1} .
- **Deuxième méthode.** Comme A est diagonalisable avec $\text{Spec}(A) = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, le polynôme $P = (X + 1/2)(X - 1)$ est un polynôme annulateur de A . On écrit alors, pour $n \in \mathbb{N}$ la division euclidienne de X^n par P et on en détermine le reste R_n qui est un polynôme de degré 1. On aura alors $A^n = R_n(A)$.

Exercice 9

On considère n « menteurs » $I_1, \dots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme de « oui » ou « non », la transmet à I_2 , et ainsi de suite jusqu'à I_n . I_n annonce alors l'information au monde. Chacun des ces menteurs transmet l'information entendue avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et le contraire avec la probabilité $1 - p$. Les réponses des n personnes sont indépendantes.

1. Déterminer la probabilité p_n que l'information soit fidèlement transmise.
2. Déterminer, si possible, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

1. Première solution.

La transmission d'une information par ces n menteurs peut se modéliser par un élément

$$(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$$

où, pour i dans $\{1, \dots, n\}$, $x_i = 1$ lorsque le menteur I_i transmet l'information correcte, et $x_i = 0$ sinon.

Ainsi, l'univers est $\Omega = \{0, 1\}^n$.

Lorsque $x \in \{0, 1\}$, on pose $p(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On prend $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu (Ω est fini...) ainsi que la probabilité sur Ω définie, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, par (Note¹) :

$$P(\{(x_1, \dots, x_n)\}) = \prod_{i=1}^n p(x_i).$$

On cherche la probabilité de l'événement C : « l'information est fidèlement transmise ». Pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ on pose :

- A_i : « l'individu I_i transmet l'information initiale » ;
- B_i : « l'individu I_i transmet l'information qu'il a reçu » ;
- $p_i = P(A_i)$.

L'événement C n'est autre que l'événement A_n . Soit i dans $\{2, \dots, n\}$. On a :

$$A_i = (A_{i-1} \cap B_i) \cup ({}^c A_{i-1} \cap {}^c B_i).$$

Cette union étant disjointe, et les réponses étant indépendantes, on a :

$$p_i = P(B_i)p_{i-1} + P({}^c B_i)(1 - p_{i-1}) = 1 - p + (2p - 1)p_{i-1}.$$

Si maintenant $i = 1$, $p_1 = P(A_1) = p$. Il s'agit alors de déterminer le terme générale de la suite (p_i) . On résout l'équation :

$$X = 1 - p + (2p - 1)X,$$

ce qui donne $X = \frac{1}{2}$. On sait alors que la suite $(u_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ où $u_i = p_i - \frac{1}{2}$ est géométrique de raison $(2p - 1)$ ce qui donne :

$$u_n = (2p - 1)^{n-1} u_1.$$

Il vient donc $\boxed{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n}$.

1. Pour définir une mesure de probabilité sur un ensemble fini, il suffit de la définir sur les singletons...

IMPORTANT

Deuxième méthode : avec une variable aléatoire.

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est le même que ci-dessus. On définit, avec les notations précédentes, une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en posant, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$:

$$X(x_1, \dots, x_n) = n - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Cette variable aléatoire compte le nombre de menteurs qui transmettent une information contraire à celle qu'ils ont reçue.

On a $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et, si on note A l'événement « *le dernier menteur donne l'information initiale* », on a :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \text{ pair}\}.$$

Mais X compte le nombre d'échecs d'une succession de n épreuve de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p (où chaque épreuve correspond à la transmission de l'information par un des menteurs) : elle suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$. Ainsi, pour k dans $\{0, \dots, n\}$, on peut écrire :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}.$$

Comme A est l'union disjointe des événement $[X = k]$ pour k pair dans $\{0, \dots, n\}$, on a :

$$P(A) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}.$$

Mais la formule du binôme de NEWTON donne :

$$P(A) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ paire}}}^n \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} = \frac{1}{2} [(p + (1-p))^n + (p - (1-p))^n].$$

Il vient donc $p_n = P(A) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$ (ouf! c'est la même chose).

2. Comme $2p-1 \in]-1, 1[$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.