
Feuille d'exercices n° 8. Séries numériques. Quelques corrections

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) et un équivalent simple de u_n .
3. On pose $a_n = \frac{1}{n} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de a_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une étude de fonction montre que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Par continuité de f_n le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution, qui est unique puisque f_n est strictement monotone.

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(1/n) = \frac{1}{n^5} > 0$ et $f_n(0) = -1$ donc : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$, par sandwich on peut conclure que $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(u_n) = 0$ donc : $nu_n = 1 - u_n^5 \xrightarrow{+\infty} 1$.

Ainsi $u_n \sim \frac{1}{n}$.

3. On pose $a_n = \frac{1}{n} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de a_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(u_n) = 0$ donc $na_n = u_n^5$ et ainsi : $a_n = \frac{u_n^5}{n} \sim \frac{1}{n^6}$.

Exercice 8

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que pour tout $n \geq 1$ on ait : $u_{n+1} \leq \frac{1}{n^2} U_n$ où $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Démontrer que la suite $(\ln U_n)$ converge.

Pour tout $n \geq 1$ entier on a $u_{n+1} = U_{n+1} - U_n$; ainsi $U_{n+1} - U_n \leq \frac{1}{n^2} U_n$ et il vient :

$$U_{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) U_n.$$

En passant au logarithme (tout est strictement positif) il vient, puisque la suite (u_n) est strictement croissante :

$$0 < \ln U_{n+1} - \ln U_n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \boxed{\geq 0}$ et la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 1} (\ln U_{n+1} - \ln U_n)$ converge (par domination). Il en résulte que la suite $(\ln U_n)$ est convergente.

Exercice 9

Pour $n \geq 1$ entier on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En regardant la série $\sum \gamma_{n+1} - \gamma_n$ démontrer que la suite (γ_n) converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\stackrel{+\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \\ &\stackrel{+\infty}{=} -\frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi : $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim -\frac{1}{2(n+1)^2} \sim -\frac{1}{2n^2} \boxed{\leq 0}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge : ainsi la suite (γ_n) est convergente.

Exercice 10

Déterminer a et b réels tels que pour tout $x \geq 0$ on ait $\frac{9}{(3x+1)(3x+4)} = \frac{a}{3x+1} + \frac{b}{3x+4}$, puis étudier la convergence et la somme de la série $\sum \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$.

Par identification, on trouve $a = 3$ et $b = -3$. On pose alors $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{9}{(3k+1)(3k+4)}$.

Il vient alors : $S_n = 3 \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+4} \right)$.

Le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la seconde somme donne :

$$S_n = 3 \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{3\ell+1} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{3n+4} \right) \xrightarrow{+\infty} 3$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$ converge de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)} = 3$

Exercice 11 (Séries de Bertrand)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$ des réels. Pour tout $n \geq 2$ entier, on pose $u_n^{\alpha, \beta} = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Démontrer que la série $\sum u_n^{1, \beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
2. Démontrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum u_n^{\alpha, \beta}$ est convergente et que si $\alpha < 1$ la série $\sum u_n^{\alpha, \beta}$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(e - (1 - \frac{1}{n})^n) e^{1/n}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

1. • Si $\beta < 0$, $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$ pour n assez grand. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, il en va de même de la série $\sum u_n^{1, \beta}$.

• Si $\beta > 0$, comme $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est décroissante, positive et continue sur $[2, +\infty[$, par **comparaison série/intégrale** la série $\sum_{n \geq 2} f(n)$ a même nature que l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$.

Le changement de variable (C^1 bijectif, croissant $t = e^u$ de $] \ln 2, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$) affirme que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$ ont même nature. Comme cette dernière converge si et seulement si $\beta > 1$, on peut conclure...

2. • Si $\alpha > 1$, il existe $\gamma \in]1, \alpha[$ et alors : $n^\gamma \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \xrightarrow{+\infty} 0$.

Ainsi $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o(1/n^\gamma)$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$ converge, il en va de même de la série $\sum u_n^{\alpha, \beta}$.

- Si $\alpha < 1$, on a $n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \xrightarrow{+\infty} +\infty$ et ainsi à partir d'un certain rang $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n} \dots$

3. On pose $v_n = \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{1/n}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ pour $n \geq 2$ entier.

On a :

$$\begin{aligned} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) &= e - \exp(n \ln(1 + 1/n)) = e - \exp\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \right) \right) \\ &= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o(1/n) \right) \end{aligned}$$

Le DL-1 de $\exp$ en 1 est $e^u \underset{u \rightarrow 1}{=} e^1 + e^1(u - 1) + o(|u - 1|)$. Avec $u \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)$, il vient :

$$\begin{aligned} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) &= e - \left(e - \frac{e}{2n} + o(1/n) \right) \\ &= \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Ainsi $v_n \sim \frac{e}{8} \frac{1}{n(\ln n)^2} \boxed{> 0}$.

D'après la question 1, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge : il en va de même de la série $\sum_{n \geq 2} v_n$.

Exercice 12

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. Pour n entier on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

et $\mu_n = \frac{1}{\sqrt{R_n}}$. Démontrer que $\mu_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ et que la série $\sum \mu_n u_n$ converge.

Comme la série $\sum u_n$ converge, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \xrightarrow{+\infty} 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mu_n R_n &= \frac{R_n - R_{n+1}}{\sqrt{R_n}} = \frac{(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})(\sqrt{R_n} + \sqrt{R_{n+1}})}{\sqrt{R_n}} \\ &= (\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}}) \left(1 + \sqrt{\frac{R_{n+1}}{R_n}} \right) \end{aligned}$$

Comme (R_n) est une suite décroissante (car chaque u_k est positif), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{R_{n+1}}{R_n} \leq 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu_n R_n \leq 2(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})$.

Or la série $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})$ converge puisque la suite $(\sqrt{R_n})$ converge. Par domination, la série

$\sum_{n \geq 0} \mu_n R_n$ converge.

Exercice 13

Soient α et β des réels tels que $0 < \beta < 1 < \alpha$. On note pour tout entier $n \geq 1$:

$$R_n = \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^\alpha}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}, \quad u_n = \frac{R_n}{S_n}, \quad v_n = (-1)^n u_n.$$

1. Trouver un équivalent simple de R_n et de S_n à l'infini.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n .
3. Étudier la nature de la série de terme général v_n .

1. • Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante, donc pour tout $t \in [k, k+1]$ on a :

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens!) on a :

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1) dt}_{f(k+1)} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \underbrace{\int_k^{k+1} f(k) dt}_{=f(k)}$$

Soit $n \geq 2$ entier. Comme les séries et intégrales impropres en jeu convergent, on obtient correctement : Par somme membre à membre de la relation précédente on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k+1)}_{=R_n - f(n+1)} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) dt}_{= \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)}_{=R_n}.$$

De là : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt + f(n+1).$

Ainsi, avec $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt = \left\{ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right\}_{n+1}^{+\infty} = \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$, on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

On a finalement : $1 \leq \frac{R_n}{\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}} \leq 1 + (\alpha-1) \frac{1}{(n+1)},$ valable pour tout $n \geq 1$. Par

sandwich :

$$\frac{R_n}{\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}} \xrightarrow{+\infty} 1.$$

Ainsi $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$ □

- L'autre équivalent se traite de la même manière et est plus facile : on obtient $S_n \sim \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}.$

2. D'après ce qui précède : $u_n = \frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1-\beta}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} \boxed{\geq 0}.$

Ainsi les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^{\alpha-\beta}}$ ont même nature. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha - \beta > 1$.

3. Comme (R_n) décroît et (S_n) croît, la suite (u_n) est décroissante. Elle converge vers 0 puisque $R_n \xrightarrow{+\infty} 0$ et $S_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$. Le critère spécial des séries alternées permet de conclure que la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 14

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$

- Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
 - Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
2. On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (*). Démontrer que :
- Si $\beta > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
 - Si $\beta < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

1. Calquer le début de la démonstration du critère de d'Alembert.

2. On suppose $\beta > 1$. Il existe donc $\gamma \in]1, \beta[$. On pose $v_n = \frac{1}{n^\gamma}$ pour tout $n \geq 1$.

$$\text{On a alors } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^\gamma = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Ainsi, pour tout } n \geq 1 \text{ entier il vient : } \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il en résulte que $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\beta - \gamma}{n} \geq 0$ donc ces deux suites ont même signe à partir d'un certain rang i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq 1$ on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

On utilise alors la question 1 pour conclure, sachant que la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 15

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, croissante, telle que $a_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$. Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$ telle

que la série $\sum \frac{x_n}{a_n}$ converge de somme ℓ . On pose pour n entier naturel $v_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n x_k$.

1. TRANSFORMATION D'ABEL AVEC RESTE.

Soit n un entier naturel. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x_k}{a_k}$. Démontrer que : $v_n = \frac{a_0 R_0}{a_n} - R_{n+1} + \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) R_k$.

2. Etudier la convergence de la suite (v_n) .

1. Puisque la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{a_n}$ converge, on a $R_n \rightarrow 0$. Puis pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{x_n}{a_n} = R_n - R_{n+1}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n x_k = \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n a_k (R_k - R_{k+1}) = \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k=0}^n a_k R_k - \sum_{k=0}^n a_k R_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k=0}^n a_k R_k - \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} R_i \right) = \frac{a_0 R_0}{a_n} - R_{n+1} + \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k=1}^n a_k R_k - \sum_{i=1}^n a_{i-1} R_i \right) \\ &= \frac{a_0 R_0}{a_n} - R_{n+1} + \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) R_k \end{aligned}$$

2. Comme $\frac{a_0 R_0}{a_n} \rightarrow 0$ et $R_{n+1} \xrightarrow{+\infty} 0$, on ne s'intéresse qu'à $w_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) R_k$ ($n \geq 1$ entier).

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|R_n| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq N + 1$ on a alors (on fait une **découpe à la Césaro**) :

$$\begin{aligned}
 |w_n| &\leq \frac{1}{a_n} \left| \sum_{k=1}^N (a_k - a_{k-1}) R_k \right| + \underbrace{\frac{1}{a_n} \sum_{k=N+1}^n |(a_k - a_{k-1}) R_k|}_{\leq \varepsilon \underbrace{\sum_{k=N+1}^n (a_k - a_{k-1})}_{\leq \varepsilon \frac{a_n - a_N}{a_n}} \leq \varepsilon} \\
 &\leq \varepsilon \frac{a_n - a_N}{a_n} \leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Enfin, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} \left| \sum_{k=1}^N (a_k - a_{k-1}) R_k \right| = 0$: il existe $N_1 \geq N$ entier tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait :

$$\frac{1}{a_n} \left| \sum_{k=1}^N (a_k - a_{k-1}) R_k \right| \leq \varepsilon.$$

Si $n \geq \max(N_1, N)$, on a alors $|w_n| \leq 2\varepsilon$. Ainsi $w_n \xrightarrow{+\infty} 0$ et $v_n \xrightarrow{+\infty} 0$.

Commentaire. J'ai redémontré Césaro...