Feuille d'exercices n° 8. Séries numériques.

Exercice 1
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) et un équivalent simple de u_n.
3. On pose $a_n = \dfrac{1}{n} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent de a_n.

Exercice 2
0n pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose encore, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^{-n} \ln u_n$.

1. Étudier la suite (u_n).
2. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $v_{n+1} \leqslant v_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
3. Démontrer que la suite (v_n) converge.

Exercice 3 (Le théorème barycentrique de Césaro)
Soient (u_n) une suite réelle qui converge vers ℓ. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
Démontrer que $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 4
Etudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = 1/(n!)^2$.
2. $u_n = \log(1 + \mathrm{e}^{-n})$.
3. $u_n = \exp(-n^\alpha)$ (α réel).
4. $u_n = \dfrac{\big((-1)^n + \mathrm{i}\big) \ln n \, \sin \frac{1}{n}}{(\sqrt{n+3} - 1)}$ $(n \geqslant 1)$
5. $u_n = \pi/2 - \arctan(n \log n)$ $(n \geqslant 2)$.
6. $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Exercice 5
Étudier la convergence et somme des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.

Exercice 6
Étudier la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2 + 2n - 1}{n!}$.

Exercice 7
Étudier la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 8
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait : $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2} U_n$ où $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Démontrer que la suite $(\ln U_n)$ converge.

Exercice 9
Pour $n \geqslant 1$ entier on pose : $\gamma_n = H_n - \ln n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En regardant la série $\sum \gamma_{n+1} - \gamma_n$ démontrer que la suite (γ_n) converge.

Exercice 10
Déterminer a et b réels tels que pour tout $x \geqslant 0$ on ait $\frac{9}{(3x+1)(3x+4)} = \frac{a}{3x+1} + \frac{b}{3x+4}$, puis étudier la convergence et la somme de la série $\sum \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$.

Exercice 11 (Séries de Bertrand)
Soient $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$ des réels. Pour tout $n \geqslant 2$ entier, on pose $u_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$. Démontrer que la série $\sum u_n^{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.
2. Démontrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum u_n^{\alpha,\beta}$ est convergente et que si $\alpha < 1$ la série $\sum u_n^{\alpha,\beta}$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{1/n}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Exercice 12
Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Pour n entier on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $\mu_n = \frac{1}{\sqrt{R_n}}$. Démontrer que $\mu_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que la série $\sum \mu_n u_n$ converge.

Exercice 13
Soient α et β des réels tels que $0 < \beta < 1 < \alpha$. On note pour tout entier $n \geq 1$:

$$R_n = \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^\alpha}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}, \quad u_n = \frac{R_n}{S_n}, \quad v_n = (-1)^n u_n.$$

1. Trouver un équivalent simple de R_n et de S_n à l'infini.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. Étudier la nature de la série de terme général v_n.

Exercice 14
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   — Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
   — Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
2. On suppose que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(*)$. Démontrer que :
   — Si $\beta > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
   — Si $\beta < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 15
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, croissante, telle que $a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Soit (x_n) une suite dans $\mathbb{R}$ telle que la série $\sum \frac{x_n}{a_n}$ converge de somme ℓ. On pose pour n entier naturel $v_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n} x_k$.

1. Transformation d'Abel avec reste.
   Soit n un entier naturel. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x_k}{a_k}$. Démontrer que : $v_n = \frac{a_0 R_0}{a_n} - R_{n+1} + \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) R_k$.
2. Etudier la convergence de la suite (v_n).