Feuille d'exercices n° 7. Suites de fonctions.
Quelques corrections

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$ réel on pose : $f_n(t) = \frac{1}{(1+t)^n}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonction (f_n) .
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) .
3. Étudier la convergence la suite (I_n) où pour n entier on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

1. Soit $t \geq 0$.
 - Si $t > 0$, alors $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - Si $t = 0$, alors $f_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. • La suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$ puisque f n'est pas continue sur cet intervalle alors que chaque f_n l'est.

• Démontrons que la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x_n = \frac{1}{n}$.

On a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

Si $f_n \xrightarrow[0, +\infty[}{CU} 0$ alors :

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty,]0, +\infty[} \xrightarrow{+\infty} 0,$$

donc $e = 0$ ce qui est vraiment stupide.

Ainsi la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$ vers 0.

• Soit $a > 0$. Démontrons que la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > a$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|f_n(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{(1+a)^n}}_{\text{indépendant de } x}$$

donc $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{(1+a)^n} \xrightarrow{+\infty} 0$.

Par sandwich $\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \xrightarrow{+\infty} 0$ et ainsi : $f_n \xrightarrow[]{CU} 0$.

3. On peut calculer cette intégrale...

Exercice 8 (Le théorème de Bernstein)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on définit la fonction polynôme $P_{n,k}$ sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit f une fonction à valeurs réelles qui est K -lipschitzienne sur $[0, 1]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n(f) =$

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

On pourra considérer une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$ et écrire la variance de X .

2. Justifier que pour tout $\rho > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que les relations $(x, y) \in [0, 1]^2$ et $|x - y| \leq \alpha$ impliquent $|f(x) - f(y)| \leq \rho$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. On considère les ensembles :

$$\mathcal{E}_1 = \{k \in \{0, \dots, n\} \mid |\frac{k}{n} - x| > \alpha\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \{k \in \{0, \dots, n\} \mid |\frac{k}{n} - x| \leq \alpha\},$$

ainsi que les sommes : $S_1(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_1} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P_{n,k}(x)$ et $S_2(x) = \sum_{k \in \mathcal{E}_2} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P_{n,k}(x)$.

3. a) Montrer que $S_2(x) \leq \rho$ puis que $S_1(x) \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$, où M borne $|f|$ sur $[0, 1]$.
 b) En déduire que $B_n(f) \xrightarrow{CU} f$ (Théorème de Bernstein, valable aussi pour une fonction f continue).
4. En déduire qu'une fonction lipschitzienne $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ pour tout n entier naturel est nulle (Théorème des moments, qui est aussi vrai pour une fonction continue).

1. Soit x dans $[0, 1]$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$. Son espérance est nx et sa variance est $nx(1-x)$.

Mais $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{k=0}^n (k - nx)^2 P_{n,k}(x)$. On divise cette dernière égalité par n^2 pour obtenir le résultat.

Conclusion. $\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1}$

2. Comme f est K -lipschitzienne, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\rho}{K}$.
 3. a. • D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sum_{k \in \mathcal{E}_2} \underbrace{|f(\frac{k}{n}) - f(x)|}_{\leq \rho} P_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in \mathcal{E}_2} \rho P_{n,k}(x) \\ &\leq \rho \sum_{k \in \mathcal{E}_2} P_{n,k}(x) \leq \rho \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = \rho(x + (1-x))^n = \rho \end{aligned}$$

• On a $|f| \leq M$ sur $[0, 1]$ donc :

$$\begin{aligned} S_1(x) &\leq 2M \sum_{k \in \mathcal{E}_1} P_{n,k}(x) \leq 2M \sum_{k \in \mathcal{E}_1} \frac{1}{\alpha^2} |\frac{k}{n} - x|^2 P_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{2M}{\alpha^2} \underbrace{\sum_{k=0}^n |\frac{k}{n} - x|^2 P_{n,k}(x)}_{= \frac{1}{n} x(1-x)} \leq \frac{M}{2n\alpha^2} \quad \text{puisque } x(1-x) \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- b. Pour $x \in [0, 1]$, comme $\sum_{k=0}^n P_{n,k}(f) = 1$, on a : $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n [f(\frac{k}{n}) - f(x)] P_{n,k}(x)$.

Il vient alors $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(\frac{k}{n}) - f(x)| P_{n,k}(x) = S_1(x) + S_2(x) \leq \frac{M}{2n\alpha^2} + \rho$. Il en résulte que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2n\alpha^2} + \rho.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{2n\alpha^2} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\frac{M}{2n\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
 Si $n \geq n_0$, on a alors : $\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ i.e. $\|B_n(f) - f\|_{\infty, [0,1]} \leq \varepsilon$, de sorte que $B_n(f) \xrightarrow[0,1]{CU} f$.

Exercice 9

Pour x réel on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Démontrer que l'on a ainsi défini correctement une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser f' .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n : x \mapsto \int_0^n \frac{\cos xt}{1+t^2} dt$.
 - a) Justifier que chaque g_n est de classe C^1 .
 - b) Justifier que l'on définit correctement une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout x réel :

$$h(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{1+t^2} dt.$$

- c) Soit $a > 0$. Démontrer que la suite (g'_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers h .
3. Déterminer la fonction f . La fonction f' est-elle dérivable en 0 ?

1. On a :

- Fixons x réel. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} = f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$ on a :

$$\left| \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{1}{t(1+t^2)}.$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par domination $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Puis $\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} x$. Il en résulte que $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0, 1]$.

En résumé $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Pour (x, t) dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe et, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout (x, t) dans $\mathbb{R} \times I$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ où $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$ version C^1 sont satisfaites. On peut donc conclure que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt.$$

On peut noter que la fonction f est impaire.

2. a. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons pour tout t réel et x réel : $g(x, t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, n]$.

- Pour tout $t \in [0, n]$ la fonction $x \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ de dérivée donnée par : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{t \sin(tx)}{1+t^2}$.
- Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, n]$.
- Pour tout t dans $[0, n]$ et x réel on a :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq n$$

est $t \mapsto n$ est intégrable sur le segment $[0, n]$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres version C^1 permet d'affirmer que g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec :

$$g'_n(x) = - \int_0^n \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt.$$

- b. Une IPP permet de montrer que h est correctement définie.
- c. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on a :

$$g'_n(x) - h(x) = \int_n^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt = I_n(x).$$

Une IPP donne :

$$I_n(x) = -\frac{1}{x} \frac{n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{1}{x} \int_n^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cos tx dt.$$

De là, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} |I_n(x)| &\leq \frac{1}{x} \frac{n}{n^2+1} + \frac{1}{x} \int_n^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &\leq \frac{1}{x} \frac{n}{n^2+1} + \frac{1}{x} \int_n^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &\leq \frac{1}{x} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{\pi}{2} - \arctan n \right) \\ &\leq \frac{1}{a} \left(\frac{n}{n^2+1} + \arctan \frac{1}{n} \right) \quad \text{dès que } x \geq a \end{aligned}$$

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \arctan \frac{1}{n} \right) = 0$ donc $I_n \xrightarrow{[a, +\infty[} 0$.

Conclusion. La suite (g'_n) converge uniformément sur les segments de $]0, +\infty[$ vers h .

- d. Comme $g_n \xrightarrow{]0, +\infty[} f'$, on peut conclure que f' est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec $f'' = h$.

3. • On a $\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ pour tout $t > 0$. Il en résulte, pour $x > 0$, que :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t} dt + h(x) = \frac{\pi}{2} + f(x).$$

On a donc, pour $x > 0$, $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \frac{\pi}{2}$ où α et β sont des constantes réelles. Comme $|f(x)| \leq \frac{\pi}{2} |x|$, il vient $\alpha = 0$. Mais f est continue en 0, avec $f(0) = 0$, donc $\beta = -\frac{\pi}{2}$. Il vient donc $f(x) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x})$ si $x \geq 0$. Par imparité on obtient alors l'expression de f .

Sa dérivée est $f'(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$, et n'est pas dérivable en 0.

Exercice 10

Soient $k \geq 0$ réel et (f_n) une suite de fonctions continues croissantes sur le segment $[0, 1]$, à valeurs réelles, qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f .

On suppose que f est lipschitzienne. Démontrer que $f_n \xrightarrow{CU} f$.

On suppose que f est K -lipschitzienne. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est K -lipschitzienne avec $K > 0$, en prenant $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$ on a :

$$(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

On pose alors $p = \lceil 1/\eta \rceil$ donc $p\eta \leq 1 < (p+1)\eta$, et, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, on pose $a_i = i\eta$ ainsi que $a_{p+1} = 1$.

Soit x dans $[0, 1]$. Il existe ainsi $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$. Il vient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + \underbrace{|f(a_i) - f(x)|}_{\leq \varepsilon}$$

Soit $k \in \{0, \dots, p\}$. Comme $f_n(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a_k)$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_k$ on ait :

$$|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

On note $N = \max(N_0, \dots, N_p)$ de sorte que pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et $n \geq N$ on a :

$$|f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

Enfin chaque fonction f_n est croissante, donc on a :

$$|f_n(x) - f_n(a_i)| = f_n(x) - f_n(a_i) \leq f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)$$

Si donc $n \geq N$, qui est indépendant de x , il vient :

$$|f_n(x) - f_n(a_i)| \leq f(a_{i+1}) + \varepsilon - f(a_i) + \varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

En définitive si $n \geq N$, qui est indépendant de x , on a : $|f_n(x) - f(x)| \leq 5\varepsilon$.

On coupe notre ε en 5 et on est rendu.