Feuille d'exercices n° 6. Intégrales à paramètres. Quelques corrections

Exercice 2

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Dans la suite de cet exercice on se propose de calculer : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

- a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
 b) Prouver que pour $x \geq 0$ réel on a : $f(x) = \int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt$.
 En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\frac{\pi}{4}$.
 c) Démontrer que pour tout $x \geq 0$ réel on a : $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.
 d) En déduire la valeur de I .
 3. (*) En partant de I^2 , et en utilisant les coordonnées polaires, proposer une autre méthode de calcul de I .

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive, et par croissance comparée on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$$

donc $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. a. • $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc f est de classe C^1 , selon le théorème fondamental, avec $f'(x) = e^{-x^2}$.

• Pour tout x positif la fonction $h(x, \cdot) : t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue donc intégrable sur $[0, 1]$.

Puis $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

Pour x positif fixé, $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0, 1]$.

Pour t fixé dans $[0, 1]$, $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue.

Pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0, a]$ on a :

$$\left| -2xe^{-x^2(1+t^2)} \right| \leq 2a$$

Or $t \mapsto 2a$ est intégrable sur $[0, 1]$ ce qui assure que g est bien de classe C^1 avec dérivation sous le signe $\int$.

- b. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour $x \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= g'(x) + 2f'(x)f(x) \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Mais avec le changement de variables $s = xt$ on obtient $ds = xdt$ et ainsi

$$x \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt = \int_0^x e^{-s^2} ds$$

ce qui donne $\varphi'(x) = 0$. Il en résulte, puisque $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, que φ est constante de valeur :

$$\varphi(0) = g(0) + f(0)^2 = g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

c. On a pour $t \in [0, 1]$ et x réel positif :

$$0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}.$$

En intégrant il vient le résultat souhaité.

d. La question précédente assure que $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et ainsi selon la question 2b on a :

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Rapidement.

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \stackrel{\text{Fubini}}{=} \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \quad (\text{Changement de variables...}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3

Pour $x > 0$ on pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt$.

- Justifier que f est correctement définie.
- Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (on précisera la dérivée de f).
- En déduire, pour $a > 0$ et $b > 0$, une expression simple de $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

1. Soit $x > 0$. On pose, pour $t > 0$, $h(t) = \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t}$. La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$.

On a $t^2 |h(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1 - xt - 1 + t + o(t)}{t} = 1 - x + o(1)$, donc h est prolongeable par continuité en 0. Ainsi h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour $(x, t) \in]0, +\infty[^2$, on pose $g(x, t) = \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t}$.

- A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- A $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ de dérivée donnée par : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -e^{-tx}$.
- A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[^2$ on a :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \leq \underbrace{e^{-at}}_{=\varphi(t)} \quad \text{dès que } x \geq a > 0.$$

et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre version C^1 s'applique : f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$. Ainsi f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec :

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = -\frac{1}{x}.$$

Comme $f(1) = 0$, il vient $f(x) = -\ln x$ pour tout $x > 0$.

3. Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \stackrel{u=bt}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{a}{b}u} - e^{-u}}{t} dt = f\left(\frac{a}{b}\right).$$

Ainsi $I(a, b) = \ln \frac{b}{a}$.

Exercice 4

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante.
3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe C^1 et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \mid F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$. En déduire que F est de classe C^∞ .
5. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \mid F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. En déduire la limite de F en 0^+ .
6. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f_x: t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ dépend donc de son comportement en $+\infty$.

— Si $x \leq 0$ on a, pour tout $t \geq 0$: $0 < \frac{1}{1+t} \leq f_x(t)$ et comme l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} dt$ diverge (puisque $\ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$) il en va de même de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

— Si $x > 0$, alors pour tout $t \geq 0$ on a : $0 < f_x(t) < e^{-xt}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge, donc aussi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

2. Soient $0 < x < y$. On a, pour tout $t \geq 0$: $0 \leq \frac{e^{-yt}}{1+t} \leq \frac{e^{-xt}}{1+t}$ et puisque les fonctions sont intégrables : $F(y) \leq F(x)$. Ainsi la fonction F est décroissante et positive.

3. Pour tout $t \geq 0$, on a $\frac{1}{1+t} \leq 1$. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a donc :

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, par sandwich, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

4. Notons $f: (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$. On a :

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x, \cdot): t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est continue (continue par morceaux suffit) et intégrable (question 1).

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f(\cdot, t): x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t}$.
- Hypothèse de domination locale : soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \psi(t)$$

où ψ est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $a > 0$.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t} dt.$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

soit aussi $F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}$, ce qui permet de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que F est de classe C^k sur $]0, +\infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. Soit $x > 0$. Le changement de variable $t \mapsto x(1+t)$ est C^1 bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]x, +\infty[$. Il donne, directement, en posant $u = x(1+t)$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u/x} \frac{du}{x} = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Comme $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge, et comme la fonction est positive, on a en fait $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = +\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$.

6. On a déjà $F(x) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = G(x)$. Montrons donc que $G(x) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$, ce qui prouvera le résultat demandé.

Une intégration par parties, en utilisant que $e^{-t} \ln t \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donne pour tout $x > 0$:

$$G(x) = [e^{-t} \ln t]_{t=x}^{t \rightarrow +\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = 0 - e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

Or comme $|e^{-t} \ln t| \underset{0^+}{\sim} -\ln t$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ existe. Par ailleurs, on a l'équivalent $e^{-x} \ln x \underset{0^+}{\sim} \ln x$. Finalement,

$$G(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 6

On considère pour x réel l'intégrale impropre $I(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$

1. Par un changement de variable, démontrer que $I(x)$ a même nature que

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} (1 - e^{-ux}) du.$$

2. Démontrer que si $x \in]-1, +\infty[$ alors $I(x)$ est bien définie.
 3. Démontrer que J est une fonction dérivable sur $] -1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
 4. En déduire que pour tout $x > -1$ l'expression de $I(x)$.

1. Le changement de variable (à justifier) $t = e^{-u}$ permet de conclure.
2. Pour $x \in]-1, +\infty[$, $h : u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}(1 - e^{-ux})$ est continue sur $]0, +\infty[$. Puis $\frac{e^{-u}}{u}(1 - e^{-ux}) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} x$, donc $J(x)$ est une intégrale faussement impropre en 0.
Enfin, par croissances comparées, $\exists \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 h(u) = 0$. Il en résulte que h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi l'intégrale impropre $J(x)$ converge, $I(x)$ aussi et on a $J(x) = I(x)$.
3. On va appliquer le théorème de Leibniz pour montrer que J est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ avec :

$$J'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u(x+1)} du.$$

Justifions cela. Pour $(x, u) \in] - 1, +\infty[\times]0, +\infty[$, posons :

$$h(x, u) = \frac{e^{-u}}{u}(1 - e^{-ux}) = \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-u(1+x)}}{u}.$$

- Pour tout $x > -1$, $u \mapsto h(x, u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction h est de classe C^∞ sur $] - 1, +\infty[\times]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x > -1$, la fonction $u \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, u)$ est continue.
- Pour tout $a \leq b$ dans $] - 1, +\infty[$, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $u > 0$, on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right| = e^{-u(x+1)} \leq e^{-u(a+1)} = \psi(u).$$

Or la fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

On peut appliquer le théorème de Leibniz qui affirme que J est de classe C^1 sur tout segment de $] - 1, +\infty[$ (donc sur $] - 1, +\infty[$: la dérivation est une notion locale), avec :

$$J'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u(x+1)} du = \frac{1}{1+x}.$$

4. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > -1$, on a $J(x) = \ln(1+x) + C$. Comme $C = J(0) = 0$, il reste $I(x) = J(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x > -1$.

Exercice 7

Pour x réel on pose, dès que cela a un sens : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{ixt} dt$.

1. Quelle est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. Posons pour t et x réels $g(x, t) = e^{-t^2} e^{ixt}$. Fixons x réel.

- Pour tout t réel la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a $t^2 |g(x, t)| = t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$. Comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$, il en va de même de $t \mapsto g(x, t)$. De la même manière cette fonction est intégrable en $-\infty$.

Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

2. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et montrons que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ en utilisant le théorème de dérivation version C^k des intégrales à paramètre.

- A t fixé dans $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^∞ et pour tout $j \in \mathbb{N}$ on obtient de suite :

$$\frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x, t) = (it)^k g(x, t).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $j \in \{0, \dots, k-1\}$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet elle est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel :

$$\left| \frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq |t|^j e^{-t^2}.$$

Mais la fonction $t \mapsto |t|^j e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable en $-\infty$ et $+\infty$ devant $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $-\infty$ et $+\infty$.

- A t réel fixé, $x \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc $C^0 - PM$).
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq |t|^k e^{-t^2} = \varphi(t)$ et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (même argument que ci-dessus)

On peut donc conclure que f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^k g(x, t) dt.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (La fonction Γ)

Pour $x > 0$, on considère $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Justifier que l'on définit ainsi correctement une fonction $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
2. Démontrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. Démontrer que Γ est C^∞ et préciser $\Gamma^{(k)}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

1. Voir le cours sur les intégrales impropres.

2. Posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ pour tout $t > 0$ et $x > 0$. Alors :

- A $x > 0$ fixé la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc $C^0 - PM$.
- A $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Soient $a < b$ des réels tels que $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$ et $x \in [a, b]$ on a :

$$|f(x, t)| \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} = \varphi(t).$$

En effet, à $t > 0$ fixé, $x \mapsto e^{(x-1)\ln t}$ peut-être décroissante (si $t < 1$) ou croissante (si $t \geq 1$) sur $[a, b]$: cette fonction est donc majorée par $e^{(a-1)\ln t}$ ou $e^{(b-1)\ln t}$, en particulier par la somme des deux. Enfin φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables sur cet intervalle (première question!).

On peut alors appliquer le **théorème de continuité des intégrales à paramètre** : la fonction Γ est continue sur $[a, b]$. Ceci étant vrai quelque soit le choix du segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

3. On fait une IPP (attention, il y a aussi problème en 0!)

4. Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fixé la fonction Γ soit de classe C^k avec :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f_k(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet elle y est continue et on a :

- $t^2 f_k(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $f(\cdot, t)$ est intégrable en $+\infty$.
- Comme $1 - x < 1$, il existe $\gamma \in]1 - x, 1[$ et alors :

$$t^\gamma f_k(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 0 t^\gamma (\ln t)^k t^{x-1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

par croissances comparées. Il en résulte que $t \mapsto f_k(x, t)$ est intégrable en 0.

— A $x > 0$ fixé, la fonction $f_k(x, \cdot)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ de dérivée donnée par :

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x, t) = (\ln t) f_k(x, t).$$

— A $t > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— Soient $a < b$ tels que $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$ on a :

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, t) \right| \leq (t^{a-1} + t^{b-1}) (\ln t)^{k+1} e^{-t} = \varphi(t)$$

Mais la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables sur cet intervalle (c'est le premier tiré ci-dessus!)

On peut alors appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre version C^1 qui assure que $\Gamma^{(k)}$ est de classe C^1 sur $[a, b]$. Ceci étant valable quelque soit le choix de l'intervalle $[a, b] \subset]0, +\infty[$, $\Gamma^{(k)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et pour $x > 0$ on a :

$$\Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{k+1} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme Γ est C^0 sur $]0, +\infty[$, on peut conclure par récurrence que Γ est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

5. Pour trouver $\Gamma(1/2)$, faire un changement de variable pour se ramener à l'intégrale de Gauß.

Exercice 9

Soient a et $\lambda > 0$ des réels. Démontrer que : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda a x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda a^2}$.

- Pour $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(a, x) = e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda a x)$. La fonction f ainsi définie est globalement continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(a, x) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|f(a, x)| \leq e^{-\lambda x^2} = \varphi(x)$.

La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par domination, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(a, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda a x) dx,$$

est correctement définie.

- La fonction f est en fait C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier $\frac{\partial f}{\partial a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

De plus, pour tout $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial a}(a, x) = -2\lambda x \sin(2\lambda a x) e^{-\lambda x^2}$, donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) \right| \leq \underbrace{2\lambda |x| e^{-\lambda x^2}}_{=\psi(x)}.$$

Comme ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Leibniz. Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour a réel, on a :

$$F'(a) = -2\lambda \int_{\mathbb{R}} x \sin(2\lambda a x) e^{-\lambda x^2} dx.$$

- Une intégration par parties donne, pour tout a réel :

$$F'(a) = \underbrace{\left\{ \sin(2\lambda ax) e^{-\lambda x^2} \right\}_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - 2\lambda a \int_{\mathbb{R}} x \cos(2\lambda ax) e^{-\lambda x^2} dx,$$

ce qui donne : $F'(a) = -2\lambda a F(a)$.

Il en résulte qu'il existe une constante C réel telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$F(a) = C \left(- \int_0^a 2\lambda t dt \right) = C e^{-\lambda a^2}.$$

Puis on a :

$$C = F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = 2 \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x^2} dx \stackrel{t=\sqrt{\lambda}x}{=} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Ainsi on a bien : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda ax) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda a^2}$.

Commentaires.

1. L'idée est classique pour exprimer une intégrale à paramètre : on cherche à montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle.
2. Je présente un calcul rapide de l'intégrale de Gauß, sans rédaction, qui utilise le passage en coordonnées polaires.

Posons $I = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t^2} dt$. On a :

$$\begin{aligned} I^2 &\stackrel{Fubini}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \stackrel{chgt var}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 10

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$.

On pose $f: (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et vérifie les hypothèses de domination locale

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = \left| (-1)^k k! \frac{e^{-t}}{(x+t)^{k+1}} \right| \leq \varphi_k(t) := k! \frac{e^{-t}}{(a+t)^{k+1}},$$

où φ_k est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre dit alors que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • Le changement de variables affine $t = xu$ conduit, suivi d'une intégration par parties consistant à intégrer e^{-xu} , conduisent à :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{1+u} du = \left[-\frac{e^{-xu}}{x(1+u)} \right]_{u=0}^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{(1+u)^2} du = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{(1+u)^2} du.$$

On va montrer que le second terme du membre de droite est négligeable devant le premier quand x tend vers l'infini, ce qui prouvera que

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On a pour tout $x > 0$:

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{(1+u)^2} du \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du = \frac{1}{x^2}.$$

Cela prouve que $\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{(1+u)^2} du \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

• L'intégration par parties consistant à dériver e^{-t} sur l'expression initiale de F conduit à

$$F(x) = [\ln(x+t)e^{-t}]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt = -\ln x + \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt.$$

On va montrer que le second terme du membre de droite est négligeable devant le premier quand x tend vers zéro, ce qui prouvera que

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x.$$

On a :

- Pour tout $t > 0$, $e^{-t} \ln(x+t) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} \lambda(t) = e^{-t} \ln t$.
- A $x > 0$ fixé, $t \mapsto e^{-t} \ln(x+t)$ et la fonction λ sont continues sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$ et $t > 0$ on a :

$$|e^{-t} \ln(x+t)| \leq \varphi(t) \begin{cases} |\ln t| & \text{si } t \leq 1 \\ te^{-t} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

et la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continue s'applique. La fonction λ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} \int_0^{+\infty} \lambda(t) dt.$$

Cela prouve que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(-\ln x)$.