Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6. Intégrales à paramètres.

Exercice 1
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
3. Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Dans la suite de cet exercice on se propose de calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ et } \ g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.

   b) Prouver que pour $x \geqslant 0$ réel on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.

   c) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ réel on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.

   d) En déduire la valeur de I.

3. (*) En partant de I^2, et en utilisant les coordonnées polaires, proposer une autre méthode de calcul de I.

Exercice 3
Pour $x > 0$ on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est correctement définie.
2. Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ (on précisera la dérivée de f).
3. En déduire, pour $a > 0$ et $b > 0$, une expression simple de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4
Soit $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante.
3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \mid F(x) - F'(x) = \dfrac{1}{x}$. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \mid F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de F en 0^+.
6. Montrer que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 5
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1.
2. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont f est solution et en déduire f.

Exercice 6
On considère pour x réel l'intégrale impropre $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Par un changement de variable, démontrer que $I(x)$ a même nature que
$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(1 - \mathrm{e}^{-ux})\,\mathrm{d}u.$$
2. Démontrer que si $x \in]-1, +\infty[$ alors $I(x)$ est bien définie.
3. Démontrer que J est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire que pour tout $x > -1$ l'expression de $I(x)$.

Exercice 7
Pour x réel on pose, dès que cela a un sens : $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

1. Quelle est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (La fonction Γ)
Pour $x > 0$, on considère $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'on définit ainsi correctement une fonction $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
2. Démontrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. Démontrer que Γ est C^∞ et préciser $\Gamma^{(k)}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Exercice 9
Soient a et $\lambda > 0$ des réels. Démontrer que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda a x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\mathrm{e}^{-\lambda a^2}$.

Exercice 10
Soit $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$.