

Feuille d'exercices n° 5. Réduction. Quelques corrections

Avertissement. Dans toute cette feuille d'exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Donner dans chacun des cas un exemple d'endomorphisme f vérifiant les propriétés suivante :

1. f est non diagonalisable et non inversible.
2. f est diagonalisable et non inversible.
3. f est non diagonalisable et inversible.
4. f est diagonalisable et inversible.

Exercice 3

On considère un entier $n \geq 2$ ainsi que les matrices $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $a_{1,1} = 1$, $a_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (1,1)$, $b_{2,1} = 1$ et $b_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (2,1)$.

1. Trouver un polynôme P de degré minimal qui annule A . Trouver un polynôme Q de degré minimal qui annule B .
2. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
3. Existe-t-il $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = R(A)$?
4. Existe-t-il $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que B et $R(A)$ soient semblables ?

Exercice 4

Soit n un entier naturel tel que $n > 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n . On pose : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - (a) sans utiliser de matrice de f ,
 - (b) en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in E$: Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 5

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a , b et c sont des réels.

Cette matrice est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

On trouve rapidement $\chi_M = X(X^2 - \alpha)$ où $\alpha = -ca + ba + bc$. On regarde alors les cas suivants :

- **Cas 1 :** $\alpha > 0$. Alors $M \in M_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{C}$.
- **Cas 2 :** $\alpha < 0$. Dans ce cas, M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque χ_M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Mais χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples : elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- **Cas 3 :** $\alpha = 0$. Dans ce cas, M n'admet qu'une seule valeur propre qui est 0 : si elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), elle est semblable à la matrice nulle, donc est nulle, d'où $a = b = c = 0$ et M est la matrice nulle.

Ainsi M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si M est la matrice nulle.

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A .
2. Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Dédurre de la question 1 les éléments propres de B .

1. • On trouve de suite que le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A = X^3 - 1$. Ainsi le spectre de A est : $\{1, j, j^2\}$. Ainsi $A \in M_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable et chaque sous-espace propre est une droite.

- On a $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 puisque $\ker(A - I)$ est une droite.

Comme $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, où C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes de $A - I$, on a $\ker(A - I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- On a $A - jI = \begin{pmatrix} -j & 0 & 1 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 1 & -j \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 puisque $\ker(A - jI)$ est une droite.

Comme $j^2C_1 + jC_2 + C_3 = 0$, où C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes de $A - jI$, on a $\ker(A - jI) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- On a $A - j^2I = \begin{pmatrix} -j^2 & 0 & 1 \\ 1 & -j^2 & 0 \\ 0 & 1 & -j^2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 puisque $\ker(A - j^2I)$ est une droite. Comme $jC_1 + j^2C_2 + C_3 = 0$, où C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes de $A - j^2I$, on

a $\ker(A - j^2I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

2. La question précédente assure que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis $B = Q(A)$ où $Q = a + bX + cX^2$. Ainsi on obtient très vite :

$$B = PQ(D)P^{-1}$$

Il en résulte que B est diagonalisable et que les valeurs propres de B (dont certaines peuvent être égales) sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

On envisage alors les cas suivants :

- $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont distincts deux à deux. Ainsi les sous-espaces propres associés à B sont distincts et :
 - $\ker(B - Q(1)I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
 - $\ker(B - Q(j)I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
 - $\ker(B - Q(j^2)I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont tous égaux. Alors $B = Q(1)I_3$ et $\ker(B - Q(1)I) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.
- Deux parmi les valeurs $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales, la troisième étant distinctes. Par exemple $Q(1) = Q(j^2) \neq Q(j)$. Alors le spectre de B est $\{Q(1), Q(j)\}$ et :

$$\ker(B - Q(1)I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(B - Q(j)I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les autres cas sont pour le lecteur.

Exercice 8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{vect}(I_2, A)$.

1. • On a $\chi_A = A^2 - \text{tr}(A)X + \det A = X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$. Ainsi A admet deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

• On a $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ donc $\ker(A - 3I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• On a $A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\ker(A + 2I) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$.

2. • Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences :

$$MB = BM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a & -2b \\ 3c & -2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -2c & -2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0$$

Il en résulte que l'ensemble des matrices qui commutent avec B est le sous-espace vectoriel $F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $c(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A . On a de suite $\text{vect}(I_2, A) \subset c(A)$.

Puis la question précédente assure que $A = PBP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Ainsi on a pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in c(A) \Leftrightarrow MPBP^{-1} = PBP^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}MPB = BP^{-1}MP \Leftrightarrow P^{-1}MP \in F.$$

Mais $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc F et $c(A)$ ont la même dimension qui est 2. Comme $\text{vect}(I_2, A) \subset c(A)$, il vient $c(A) = \text{vect}(I, A)$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in L(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \ker(f + \text{Id}) \oplus \ker(f - 2\text{Id})$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
 - a) f est-il diagonalisable ?
 - b) Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \ker(f - 2\text{Id})$.

1. Déjà fait mille fois : on n'oublie pas les deux sens puisque l'on est en dimension quelconque.
2. Par *analyse/synthèse*, sans souci. Noter que le fait que la somme soit directe est une conséquence du cours.
3. a) $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est un polynôme annulateur de f qui est scindé à racines simples : f est donc diagonalisable.
 b) • Soit $y \in \text{Im}(f + \text{Id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) + x = y$. Il vient alors :

$$(f - 2\text{Id})(y) = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$$

Ainsi $y \in \ker(f - 2\text{Id})$. On a donc montré que : $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \ker(f - 2\text{Id})$.

- Avec la question 2 et le théorème du rang on a :

$$\begin{cases} \dim E = \dim \ker(f + \text{Id}) + \dim \ker(f - 2\text{Id}) \\ \dim E = \dim \ker(f + \text{Id}) + \dim \text{Im}(f + \text{Id}) \end{cases}$$

Ainsi $\dim \text{Im}(f + \text{Id}) = \dim \ker(f - 2\text{Id})$.

L'inclusion du premier point permet de conclure que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \ker(f - 2\text{Id})$.

Exercice 11

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B = A^2 + 2I$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. Déterminer les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés. La matrice B est-elle diagonalisable ?
4. Vérifier que si λ est valeur propre de A alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B . En déduire que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme un polynôme en B .
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice B .
 - a. Pour n entier on appelle R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Exprimer R_n en fonction de n .
 - b. Déterminer alors B^n pour tout $n \geq 0$ entier.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Le polynôme $P = X^2 - X + 1$ est un polynôme annulateur de A .

Soit discriminant est $\Delta = -3$. Ainsi P admet deux racines complexes qui sont $z = e^{i\pi/3}$ et $\bar{z}$: il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: sont déterminant est le produit de ses valeurs propres complexes.

Puis le polynôme caractéristique χ_A est à coefficient réel, admet une racine complexe au moins qui doit être z ou $\bar{z}$. En fait les deux sont racines de χ_A , puisque si ζ est une racine complexe de $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $\bar{\zeta}$ est aussi racine de Q . Mieux, les multiplicité de z et $\bar{z}$ comme racines de χ_A sont les mêmes (facile). Appelons r cette multiplicité commune. Il vient alors $\det A = (z\bar{z})^r = |z|^{2r} = 1$.

Exercice 13

Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geq 1$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que : $[f, g] = f$.

1. Démontrer que pour tout p entier naturel on a : $[f^p, g] = pf^p$.
2. En considérant l'application $\varphi = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & [h, g] \end{pmatrix}$, démontrer que f est nilpotent.

Exercice 14 (Projecteurs spectraux)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$, f dans $\mathcal{L}(E)$ diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, d'espaces propres associés $E_1, \dots, E_k$.

Pour $1 \leq i \leq k$, le projecteur p_i de E d'image E_i et de noyau $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ s'appelle un *projecteur spectral* de f pour la valeur propre λ_i .

1. Démontrer que : $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ lorsque $i \neq j$ et $p_1 + \dots + p_k = \text{Id}_E$.
2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, exprimer simplement $P(f)$. En déduire que chaque projecteur spectral de f est un polynôme en f .

Exercice 15 (Commutant : le retour !)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose : $c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid [f, g] = 0\}$. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés.

1. Démontrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f alors pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, il existe μ_i dans $\mathbb{K}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$.
2. En déduire que $c(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.

Exercice 16 (Théorème de diagonalisation simultanée de Schur)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables. On suppose que f et g commutent i.e. que $f \circ g = g \circ f$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f ainsi que $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres associés.

Démontrer que f et g sont simultanément diagonalisable i.e. possèdent une base commune de vecteurs propres.

Exercice 17

Soient $n \geq 1$ entier et $A \in E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_A(M) = AM$.

1. Démontrer que φ_A est linéaire et montrer que $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(\varphi_A)$.
2. Pour $\lambda \in \text{Spec}(A)$, comparer les dimensions des sous-espaces propres $E_{A,\lambda} = \ker(A - \lambda I)$ et $E_{\varphi_A,\lambda} = \ker(\varphi_A - \lambda \text{Id}_E)$

1. Pour la linéarité : ... Pour l'égalité des spectres, on procède par double inclusion.

- Soit $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Il existe alors X non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.

Méthode 1. On obtient donc $AX^tX = \lambda X^tX$ et en posant $M = X^tX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient $AM = \lambda M$ donc $\varphi_A(M) = \lambda M$. Comme X est non nul, M est non nulle (le détailler...) et ainsi $\lambda \in \text{Spec}(\varphi_A)$.

Méthode 2. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les n colonnes sont toutes égales à X . Il vient alors :

$$\varphi_A(M) = A \begin{pmatrix} X & \cdots & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X & \cdots & \lambda X \end{pmatrix} = \lambda M.$$

- Soit $\lambda \in \text{Spec}(\varphi_A)$. Il existe alors M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = \lambda M$. Appelons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Comme A est non nulle, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_i \neq 0$. Comme $AM = \lambda M$ il vient de suite $AC_i = \lambda C_i$ ce qui prouve que $\lambda \in \text{Spec}(A)$.

2. Soit $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Avec les calculs précédents, on voit que si $X_1, \dots, X_n$ sont dans $E_{A,\lambda}$ alors la matrice $M = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$ est dans $E_{\varphi_A,\lambda}$. On considère alors l'application :

$$F = \left(\begin{array}{ccc} (E_{A,\lambda})^n & \longrightarrow & E_{\varphi_A,\lambda} \\ (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

qui est un isomorphisme linéaire (linéaire, injectif et surjectif : à vérifier).

Il en résulte que $\dim E_{\varphi_A,\lambda} = \dim (E_{A,\lambda})^n = n \dim E_{A,\lambda}$.

Exercice 18

On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F &= \text{vect}((1, 1, 1)) \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z = 0\} \end{cases}$$

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est F et l'image G . Peut-on le choisir diagonalisable ?

- On peut noter que $G = \text{vect}((0, 2, 1))$. On note $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (0, 2, 1)$ et on complète la famille libre $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en une base $\beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On définit alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ en posant :

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) &= 0 \\ f(\varepsilon_2) &= \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) &= \varepsilon_2 \end{cases}$$

de sorte que $\text{Im } f = \text{vect}(\varepsilon_2) = G$ et $\ker f = \text{vect}(\varepsilon_1) = F$.

- Soit f un tel endomorphisme. Noter que si λ est non nul alors :

$$\ker(f - \lambda \text{Id}_E) \subset \text{Im } f.$$

En effet, si $x \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$ alors $f(x) = \lambda x$ donc $x = f(x/\lambda) \in \text{Im } f$.

Ainsi on a $\ker f \oplus \sum_{\substack{\lambda \in \text{Spec}(f) \\ \lambda \neq 0}} \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \subset F + G$, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est inférieure (ou égale) à $\dim F + \dim G = 2 \neq 3$: f n'est pas diagonalisable.

Exercice 19

Soient $n \geq 1$ entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ayant chacune n valeurs propres distinctes.

Démontrer que A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

C'est la traduction matricielle du théorème de diagonalisation simultanée de Schur.

Exercice 20

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents tels que tout sous-espace stable par u admette un supplémentaire stable par u .

On va démontrer qu'il n'y a que l'endomorphisme nul qui vérifie les conditions imposées.

Le noyau d'un tel endomorphisme est stable, car $u(\ker u) = \{0\}$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel, donc dans $\ker u$ en particulier. Il existe donc un supplémentaire F de $\ker u$ stable par u . Soit v l'endomorphisme de F induit par u .

— D'une part, v est un isomorphisme (théorème du rang).

— D'autre part, il est nilpotent, car u l'est.

La seule possibilité est que l'espace de départ de v soit réduit à zéro, ce qui entraîne que $E = \ker u + F = \ker u$, c'est-à-dire que $u = 0$. La réciproque est sans souci.

Remarque. Démontrer que en fait on a : $F = \text{Im } u$.

Exercice 21

Soient N et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec D diagonalisable, N nilpotente non nulle et $ND = DN$. Montrer que $D + N$ n'est pas diagonalisable.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $D + N$ est diagonalisable.

Notons g et h les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à D et N . Ainsi l'endomorphisme $f = g + h$ est diagonalisable.

Appelons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de g (qui est diagonalisable puisque D l'est). Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on note $E_i = \ker(g - \lambda_i \text{Id})$.

Comme g est diagonalisable, $\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

Comme g et h commutent, les E_i pour $1 \leq i \leq p$ sont stables par h , et l'endomorphisme induit h_i est encore nilpotent.

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, le sous-espace E_i est aussi f stable et l'endomorphisme induit f_i est aussi diagonalisable.

Enfin, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $f_i = \lambda_i \text{Id}_{E_i} + h_i$ donc $h_i = f_i - \lambda_i \text{Id}_{E_i}$ est diagonalisable et comme h_i est aussi nilpotent, il est nul.

Il en résulte que $h = 0$.

Exercice 22

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\alpha_i(\lambda)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ les n racines n -ièmes de λ . Soient $L_i(X)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\alpha_i(\lambda)$.

1. Montrer que u diagonalisable implique u^n diagonalisable. Quid de la réciproque ?
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n L_i = 1$. En déduire que $\ker(u^n - \lambda \text{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^n \ker(u - \alpha_i(\lambda) \text{Id}_E)$.
3. Montrer que si u est inversible, alors u^n diagonalisable implique u diagonalisable.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on écrira plus simplement α_k au lieu de $\alpha_k(\lambda)$. On rappelle que :

$$L_k = c_k \prod_{j \neq k} (X - \alpha_j) \quad \text{où} \quad c_k = 1 / \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j).$$

Ainsi : $(X - \alpha_k)L_k = c_k \prod_{j=1}^n (X - \alpha_j) = c_k(X^n - \lambda).$

1. Si u est diagonalisable, i.e. s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E de vecteurs propres de u , alors $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u^n (puisque si $u(x) = \alpha x$, alors $u^n(x) = \alpha^n x$), et donc l'endomorphisme u^n est diagonalisable.

La réciproque est fautive : un endomorphisme nilpotent u non nul n'est pas diagonalisable, alors que $u^n = 0$ l'est.

2. • Deux polynômes de degré $\leq n - 1$ qui coïncident en n points sont égaux. C'est le cas des polynômes $\sum_{k=1}^n L_k$ et 1, qui coïncident en les n racines n -ièmes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de λ .

Autre idée : on peut aussi utiliser le fait que plus généralement, tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ s'écrit

$$P = \sum_{k=1}^n P(\alpha_k) L_k.$$

• Les sous-espaces propres $\ker(u - \alpha_k \text{Id}_E)$, où $k \in \{1, \dots, n\}$, sont en somme directe (c'est du cours) et inclus dans $\ker(u^n - \lambda \text{Id}_E)$, puisque si $u(x) = \alpha_k x$, alors $u^n(x) = \alpha_k^n x = \lambda x$.

Ainsi on a : $\bigoplus_{k=1}^n \ker(u - \alpha_k \text{Id}_E) \subset \ker(u^n - \lambda \text{Id}_E)$.

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \ker(u^n - \lambda \text{Id}_E)$.

Puisque $1 = \sum_{k=1}^n L_k$, on a $\text{Id}_E = \sum_{k=1}^n L_k(u)$, donc : $x = \sum_{k=1}^n L_k(u)(x)$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrons que $L_k(u)(x) \in \ker(u - \alpha_k \text{Id}_E)$. On a :

$$(u - \alpha_k \text{Id}_E)(L_k(u)(x)) = (u - \alpha_k \text{Id}_E) \circ L_k(u)(x) = P_k(u)(x)$$

où $P_k = (X - \alpha_k)L_k$.

Comme $P_k = c_k(X^n - \lambda)$ il vient : $P_k(u)(x) = u^n(x) - \lambda x = 0_E$.

On a donc : $\ker(u^n - \lambda \text{Id}_E) \subset \bigoplus_{k=1}^n \ker(u - \alpha_k \text{Id}_E)$.

3. Supposons que u inversible et que u^n est diagonalisable. Alors les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de u^n sont non nulles (car u^n est inversible). De plus

$$E = \bigoplus_{j=1}^r \ker(u^n - \lambda_j \text{Id}_E).$$

Avec la question 2, on en déduit que E est une somme directe de sous-espaces propres de u : l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 23

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

On suppose que M est une matrice qui convient. Le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) = X(X - 1)^2$ est annulateur de M . Les valeurs propres possibles de M sont donc 0 et 1.

Comme M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, la condition sur la trace dit que la seule valeur propre de M est 0. Mais alors $M - I_n$ est inversible, et la condition $M(M - I_n)^2 = 0$ est équivalente à $M = 0$.