Feuille d'exercices n° 5. Réduction.

Avertissement. Dans toute cette feuille d'exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2
Donner dans chacun des cas un exemple d'endomorphisme f vérifiant les propriétés suivante :

1. f est non diagonalisable et non inversible.
2. f est diagonalisable et non inversible.
3. f est non diagonalisable et inversible.
4. f est diagonalisable et inversible.

Exercice 3
On considère un entier $n \geqslant 2$ ainsi que les matrices $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $a_{1,1} = 1$, $a_{i,j} = 0$ si $(i, j) \neq (1, 1)$, $b_{2,1} = 1$ et $b_{i,j} = 0$ si $(i, j) \neq (2, 1)$.

1. Trouver un polynôme P de degré minimal qui annule A. Trouver un polynôme Q de degré minimal qui annule B.
2. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
3. Existe-t-il $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = R(A)$?
4. Existe-t-il $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que B et $R(A)$ soient semblables ?

Exercice 4
Soit n un entier naturel tel que $n > 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$: Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 5
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.
Cette matrice est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$?

Exercice 6
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question 1 les éléments propres de B.

Exercice 8
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{vect}(I_2, A)$.

Exercice 9
Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d ?un espace vectoriel E de dimension n, et soit $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in L(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \ker(f + \text{Id}) \oplus \ker(f - 2\text{Id})$.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   a) f est-il diagonalisable ?
   b) Prouver que $\text{Im}\,(f + \text{Id}) = \ker(f - 2\text{Id})$.

Exercice 11
On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B = A^2 + 2I$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. Déterminer les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés. La matrice B est-elle diagonalisable ?
4. Vérifier que si λ est valeur propre de A alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme un polynôme en B.
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de la matrice B.

a. Pour n entier on appelle R_n le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Exprimer R_n en fonction de n.

b. Déterminer alors B^n pour tout $n \geqslant 0$ entier.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que $\det A = 1$.

Exercice 13

Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que : $[f, g] = f$.

1. Démontrer que pour tout p entier naturel on a : $[f^p, g] = pf^p$.
2. En considérant l'application $\varphi = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & [h, g] \end{array} \right)$, démontrer que f est nilpotent.

Exercice 14 (Projecteurs spectraux)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geqslant 1$, f dans $\mathcal{L}(E)$ diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, d'espaces propres associés $E_1, \dots, E_k$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, le projecteur p_i de E d'image E_i et de noyau $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ s'appelle un *projecteur spectral* de f pour la valeur propre λ_i.

1. Démontrer que : $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ lorsque $i \neq j$ et $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E$.
2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, exprimer simplement $P(f)$. En déduire que chaque projecteur spectral de f est un polynôme en f.

Exercice 15 (Commutant : le retour !)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose : $c(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid [f, g] = 0\}$. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés.

1. Démontrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f alors pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, il existe μ_i dans $\mathbb{K}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$.
2. En déduire que $c(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.

Exercice 16 (Théorème de diagonalisation simultanée de Schur)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables. On suppose que f et g commutent i.e. que $f \circ g = g \circ f$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f ainsi que $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres associés.

Démontrer que f et g sont simultanément diagonalisable i.e. possèdent une base commune de vecteurs propres.

Exercices supplémentaires

Exercice 17
Soient $n \geqslant 1$ entier et $A \in E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_A(M) = AM$.

1. Démontrer que φ_A est linéaire et montrer que $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(\varphi_A)$.
2. Pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, comparer les dimensions des sous-espaces propres $E_{A,\lambda} = \ker(A - \lambda I)$ et $E_{\varphi_A,\lambda} = \ker(\varphi_A - \lambda \mathrm{Id}_E)$

Exercice 18
On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F & = \mathrm{vect}((1,1,1)) \\ G & = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z = 0\} \end{cases}$$

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est F et l'image G. Peut-on le choisir diagonalisable ?

Exercice 19
Soient $n \geqslant 1$ entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ayant chacune n valeurs propres distinctes.
Démontrer que A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

Exercice 20
Soient E un $\mathbb{K}$–espace de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents tels que tout sous-espace stable par u admette un supplémentaire stable par u.

Exercice 21
Soient N et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec D diagonalisable, N nilpotente non nulle et $ND = DN$. Montrer que $D + N$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 22
Soient E un $\mathbb{C}$–espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\alpha_i(\lambda)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ les n racines n-ièmes de λ. Soient $L_i(X)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\alpha_i(\lambda)$.

1. Montrer que u diagonalisable implique u^n diagonalisable. Quid de la réciproque ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$. En déduire que $\ker(u^n - \lambda \mathrm{Id}_E) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \ker(u - \alpha_i(\lambda)\mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que si u est inversible, alors u^n diagonalisable implique u diagonalisable.

Exercice 23
Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.