Feuille d'exercices n° 4. Intégration.

Exercice 1
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que :

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

1. — La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est continue sur $]2,+\infty[$.

   — On a $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = x\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

   Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$ et $t \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.

   — On a $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}} \underset{x\to2^+}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{2\sqrt{x-2}}$. Ainsi les fonctions f est $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$ sont simultanément intégrable en 2. Mais g est intégrable en 2 (Riemann) donc f aussi.

   Conclusion. f est intégrable sur $]2,+\infty[$.

2. — La fonction $h : x \mapsto x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

   — Soit γ réel. On a $x^\gamma h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^{a-\gamma}}$. On a alors deux cas :

   — Si $a > 1$, on choisit $\gamma \in]1,a[$ et alors $\dfrac{\ln x}{x^{a-\gamma}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées de sorte que $h(x) = o(\frac{1}{x^\gamma})$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est intégrable en $+\infty$, il en va de même pour h.

   — Si $a \leqslant 1$ alors $xh(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^{a-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissances comparées. Dans ce cas il existe $A > 0$ tel que $h(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \geqslant A$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, h non plus.

   — On a $h(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln x$. Comme ln est intégrable en 0, h aussi.

   Conclusion. h est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $a > 1$.

Exercice 3
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Démontrer que $g : t \mapsto \dfrac{\sqrt{f(t)}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4
Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}}\, \mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$.
3. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 5 (Intégrales de Bertrand)
Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.
3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1,\beta}$.

Exercice 6 (Changement de variable)
Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1}$. *On pourra faire un changement de variables évident...*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$. *On pourra faire le changement de variable* $y = \dfrac{1}{x}\ldots$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\, \mathrm{d}x$. *On pourra faire successivement les changements de variables* $y = \sqrt{x}$ *et* $y = \cos t$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$. *On pourra faire le changement de variable* $u = \arctan x\ldots$

1. Traité.
2. Traité
3. • Via le changement de variable $y = \sqrt{x}$ qui est C^1, bijectif, croissant de $]0, 1[$ sur $]0, 1[$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\ln y}{(1-y^2)^{3/2}} (2\, \mathrm{d}y)$ ont même nature et même valeur si convergence.

   • Via le changement de variable $y = \cos t$ qui est C^1 bijectif, décroissant de $]0, \pi/2[$ sur $]0, 1[$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\ln y}{(1-y^2)^{3/2}} (\,\mathrm{d}y)$ et $\displaystyle\int_{\pi/2}^0 \frac{4\ln\cos t}{(1-\cos^2 t)^{3/2}} (-\sin t\ \, \mathrm{d}t) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{4\ln\cos t}{\sin^2 t}\, \mathrm{d}t$ ont même nature et même valeur si convergence.

   • Enfin une IPP formelle (valable à posteriori) donne :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\ln\cos t}{\sin^2 t}\, \mathrm{d}t = -4\mathrm{cotan}\, t \ln\cos t]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{cotan}\, t\ \tan t\, \mathrm{d}t = -2\pi.$$

4. • La fonction $f : t \mapsto \left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• En 0, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc cette intégrale est faussement impropre en 0.

• En $+\infty$, on a $0 \leqslant \left(\dfrac{\arctan t}{t}\right)^2 \leqslant \dfrac{\pi}{4x^2}$. Comme $x \mapsto \dfrac{\pi}{4x^2}$ est intégrable en $+\infty$, il en va de même de f, par domination.

• Le changement de variable $u = \arctan x$ qui est C^1 bijectif croissant de $]0,+\infty[$ sur $]0,\pi/2[$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{u}{\sin u}\right)^2 \mathrm{d}u.$$

Deux IPP formelles (justifiées à posteriori) donnent :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{u}{\sin u}\right)^2 \mathrm{d}u &= \underbrace{-u^2 \text{cotan}\, u]_0^{\pi/2}}_{=0} + 2\int_0^{\pi/2} u \,\text{cotan}\, u \,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{-2u\ln(\sin u)]_0^{pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Il reste à calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ (qui est bien convergente). Le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ donne $I = J$ où $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}2I &= I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u\,\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} (\ln\sin 2u - \ln 2)\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2u\,\mathrm{d}u \underbrace{=}_{y=2u} -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln\sin u\,\mathrm{d}u}_{=I} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin u\,\mathrm{d}u}_{=J\ (u=\frac{\pi}{2}-t)}\right)\end{aligned}$$

donc $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 7

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\ \ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$, démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t\ \ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t + I_n,$$

où I_n est une intégrale que l'on précisera.

b) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ \ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8
Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

- L'intégrale impropre I converge car faussement impropre en 0 et 1.
- Soit $x \in]0,1[$. On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$. On a correctement (les deux intégrales impropres du membre de droite sont convergentes...) :

$$I(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Mais le changement de variables $s = t^2$, bijectif C^1 et croissant de $]0,x[$ sur $]0,x^2[$ assure que :

$$\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{2\sqrt{s}}{\ln s}\,\frac{\mathrm{d}s}{2\sqrt{s}} = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln s}\,\mathrm{d}s.$$

Ainsi, en rédigeant rapidement :

$$I(x) \quad = \quad \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{t=\mathrm{e}^u} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u = \underbrace{\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{\mathrm{e}^u - 1}{u}\,\mathrm{d}u}_{\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u}_{\underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln 2} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln 2$$

Ainsi $I = \ln 2$.

Exercice 9
Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. On note

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad \text{et on considère } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par : } g(x) = \int_0^x f(t)dt - xI.$$

a) Montrer que g est de classe C^1 et T-périodique.

b) Pour $a > 0$ que dire de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)-I}{t}dt$?

c) Montrer que $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)-I}{t}dt =_{+\infty} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. - La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisque f est continue) avec $F' = f$. Il en résulte que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = f(x) - I$ pour tout x réel.

   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(x+T) = F(x+T) - (x+T)I == F(x) + \underbrace{\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t}_{=F(T)} - xI - F(T) = 0.$$

   Ainsi g est T-périodique.

2. Comme g est C^1, on peut faire une intégration par parties. Pour $0 < a \leqslant x$ réels, on a :

$$\int_a^x \underbrace{\frac{f(t)-I}{t}}_{=\frac{g'(t)}{t}} \mathrm{d}t = \left\{\frac{g(t)}{t}\right]_a^x + \int_a^x \frac{g(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Mais g est continue et périodique : elle est bornée par un réel positif M sur $\mathbb{R}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, on peut dire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)-I}{t} \mathrm{d}t$ converge de valeur $-\dfrac{g(a)}{a} + \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{g(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

3. Pour $x > 0$, on a :

$$|h(x)| \leqslant \frac{M}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{M}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{2}{M}t.$$

Ainsi $h(x) =_{+\infty} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n t}{t^2} \mathrm{d}t$ et $I(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'intégrale impropre I_n converge pour tout $n \in_N^*$ et qu'elle est strictement positive.
2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, justifier de la convergence de l'intégrale impropre $I(s)$ et exprimer sa valeur en fonction de $|s|$ et I_1.
3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier, à l'aide du changement de variables $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale impropre

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{u\sqrt{u}} \mathrm{d}u,$$

et déterminer une relation entre I_n et J_n.

b) Établir, pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1]$, l'inégalité : $\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| \leqslant u$.

c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• L'application $f_n : t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $t \in]0,+\infty[$ on a : $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, par domination f_n est intégrable en $+\infty$.

• On va utiliser les développements limités suivants :

$$\begin{cases} \cos u & \underset{u\to 0}{=} 1 - \dfrac{u^2}{2} + o(u^3) \\ (1+u)^n & \underset{u\to 0}{=} 1 + nu + o(u) \end{cases}$$

On a $(\cos t)^n \underset{t\to 0}{=} \left(1 - \dfrac{1}{t^2} + o(t^2)\right)^n \underset{t\to 0}{=} 1 - n\dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc :

$$f_n(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{n}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{n}{2}.$$

Ainsi f_n est prolongeable par continuité en 0 : elle est intégrable en 0.

• Enfin, $f_n \geqslant 0$, est continue et n'est pas identiquement nulle : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n > 0$.

2. Soit $s \in \mathbb{R}$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos st}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Si $s=0$ la fonction précédente est nulle sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale impropre $I(0)$ est convergente.

Si maintenant $s>0$, le changement de variable $v=su$ (valable car $u \mapsto su$ est une fonction C^1 strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur lui même) permet de dire que les intégrales impropres $I(s)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos v}{(v/s)^2}\frac{\mathrm{d}v}{s}$ ont même nature, et même valeur si convergence.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos v}{(v/s)^2}\frac{\mathrm{d}v}{s} = sI_1$, donc l'intégrale impropre $I(s)$ converge de valeur $I(s) = sI_1$.

Si maintenant $s<0$, le changement de variable $v=su$ (valable car $u \mapsto su$ est une fonction C^1 strictement décroissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur lui même) permet de dire que les intégrales impropres $I(s)$ et $\displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{1-\cos v}{(v/s)^2}\frac{\mathrm{d}v}{s}$ ont même nature, et même valeur si convergence.

Or $\displaystyle -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos v}{(v/s)^2}\frac{\mathrm{d}v}{s} = -sI_1$, donc l'intégrale impropre $I(s)$ converge de valeur $I(s) = -sI_1$.

Conclusion. L'intégrale impropre $I(s)$ est convergente et $I(s) = |s|\, I_1$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $u \mapsto \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$ de $]0,+\infty[$ dans luis même est C^1 (achtung : ne pas prendre 0 !), strictement croissante et bijective.

Ainsi par le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$, les intégrale impropres I_n et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{(2u/n)} \frac{\frac{2}{n}\,\mathrm{d}u}{2\sqrt{\frac{2u}{n}}}$$

ont même nature et même valeur si convergence.

Mais on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{(2u/n)} \frac{\frac{2}{n}\,\mathrm{d}u}{2\sqrt{\frac{2u}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}J_n$, donc l'intégrale impropre J_n (puisque l'intégrale impropre I_n l'est) est convergente et :

$$I_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}J_n.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit ${}_ng = \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n \end{array}\right)$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$ et si $x \in]0,1]$ on a :

$$g_n'(x) = n\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\left(-\sin\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^{n-1}.$$

Mais les accroissements finis permettent de dire que pour tout t réel $|\sin t| \leqslant |t|$ donc, pour tout $x \in]0,1]$ il vient :

$$\left|g_n'(x)\right| \leqslant 1$$

Les accroissements finis appliqués à g_n cette fois permettent d'écrire que pour tout x dans $]0,1]$, on a :

$$|g_n(0) - |g_n(x)|| \leqslant |x|\,.$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1]$ on a : $\left|1 - \left(\cos\sqrt{\frac{2x}{n}}\right)^n\right| \leqslant x$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, en utilisant deux fois l'inégalité triangulaire : :

$$\begin{aligned} |J_n| &\leqslant \int_0^1 \frac{\left|1 - \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right|}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{\left|1 - \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right|}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} + \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = 5 \end{aligned}$$

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et une constante $A \geqslant 0$ telles que pour tout $x \geqslant 0$: $g(x) \leqslant A + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

En considérant $h : x \mapsto \exp\left(-\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(A + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que g est bornée.

On considère la fonction auxiliaire $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \exp\left(-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Comme f et g sont continue, cette fonction est de classe C^1.pour $x \geqslant 0$ réel, on a :

$$\varphi'(x) = \underbrace{f(x)\exp\left(-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\geqslant 0}\left(g(x) - A - \int_0^x f(t)g(t)\right) \leqslant 0.$$

Il en résulte que φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geqslant 0$ on a donc :

$$A = \varphi(0) \geqslant \varphi(x).$$

Il vient ainsi, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\underbrace{\left(A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\geqslant g(x)} \leqslant A\exp\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Mais f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et est positive : pour tout x réel, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Enfin, pour tout $x \geqslant 0$, on a donc : $0 \leqslant g(x) \leqslant A\exp\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Le fonction g est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Commentaires

1. Essayer de comprendre d'où vient cette fonction auxiliaire. Comparer notamment avec d'autres exercices (dont un dans cette feuille) présentant des situations similaires.
2. **Autre Méthode**. On peut supposer $A > 0$. Pour tout $x \geqslant 0$ on a alors :

$$\frac{f(x)g(x)}{A + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant f(x).$$

Le premier membre est une dérivée logarithmique. On intègre alors cette inégalité entre 0 et $X \geqslant 0$...

Exercice 12

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = +\infty$. Démontrer que $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle les fonctions f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
   a) Démontrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Démontrer que si $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.
   c) Qu'en conclure ?

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = +\infty$, il existe $A \geqslant 0$ réel tel que $f' \geqslant 0$ sur $[A, +\infty[$. Sur cet intervalle φ est donc croissante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

   Supposons que cette limite soit un réel ℓ. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on écrit les accroissements finis ponctués entre x et $x+1$ pour la fonction φ. Il existe c_x entre x et $x+1$ tel que :

   $$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \varphi'(c_x) \qquad (\spadesuit)$$

   Comme $c_x \geqslant x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} c_x = +\infty$, et, par composition des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(c_x) = +\infty$. Comme $\varphi(x+1) - \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell = 0$, on obtient une contradiction avec $(\spadesuit)$.
2. a. Sur $\mathbb{R}^+$, on a : $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + (f'')^2)$. par domination, comme f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, $|ff''|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   b. Soit $x > 0$. On fait une intégration par parties.

   $$\int_0^x ff'' = [ff']_0^x - \int_0^x (f')^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x (f')^2$$

   Or $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x ff'' \in \mathbb{R}$ selon la question précédente.

   Supposons que $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors $\displaystyle\int_0^x (f')^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x)f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

   c. Si $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $f(x)f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

   selon la première question, $f^2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredit le fait que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Ainsi $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Exercice 13

Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, décroissante, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$.

Comme f est décroissante, $\exists \lim_{x \to 0} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si cette limite est un réel ℓ, on a : $\exists \lim_{x \to 0} x f(x) = 0$.
Sinon $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Il existe alors $x_0 \in]0,1]$ tel que pour tout $x \in]0, x_0]$ on ait : $f(x) \geqslant 0$.
Soit $x \in]0, x_0]$.Pour tout $t \in]0, x]$ (puisque f est décroissante), on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant f(t).$$

On intègre entre 0 et x pour obtenir :

$$0 \leqslant x f(x) \leqslant \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t \qquad (\clubsuit)$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout $x \in]0, x_0]$. Or f est intégrable sur $]0,1]$ donc $\exists \lim_{x \to 0} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = 0$. Par sandwich, avec $(\clubsuit)$, on obtient donc : $\exists \lim_{x \to 0} x f(x) = 0$.

Exercice 14 (Transformée de Hardy)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue telle que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\, \mathrm{d}t$ converge. On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et on considère :

$$H_f : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

1. Démontrer que H_f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction encore notée H_f.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t = -F(x) H_f(x) + 2 \int_0^x f(t) H_f(t)\, \mathrm{d}t$$
3. En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $\displaystyle\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{I} \sqrt{\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t}$.
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H_f(t)^2\, \mathrm{d}t$ converge avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} H_f(t)^2\, \mathrm{d}t \leqslant 4I$.

1. Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Par continuité de f, F est de classe C^1 avec $F' = f$. Puis, si $x > 0$, on a :
$$H_f(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} F'(0) = f(0).$$
On peut donc prolonger H_f par continuité en 0 en posant $H_f(0) = f(0)$.
2. Soit $x > 0$. On a :
$$\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{F(t)^2}{t^2}\, \mathrm{d}t \underbrace{=}_{IPP\ formelle} \left\{-\frac{1}{t} F(t)^2\right]_0^x + 23 \int_0^x \frac{1}{t} f(t) F(t)\, \mathrm{d}t$$
Notons que cette intégration par parties est correcte puisque pour tout $t > 0$ on a $-\dfrac{1}{t} F(t)^2 = -F(t) H_f(t) \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Il vient ainsi :
$$\begin{aligned} \int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t &= -\underbrace{\frac{F(x)^2}{x}}_{\geqslant 0} + 2 \int_0^x f(t) H_f(t)\, \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2 \int_0^x f(t) H_f(t)\, \mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{Cauchy-Schwarz} 2 \sqrt{\int_0^x f(t)^2\, \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t}. \end{aligned}$$
Ainsi : $\displaystyle\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{I} \sqrt{\int_0^x H_f(t)^2\, \mathrm{d}t}$.

3. Si $\displaystyle\int_0^x H_f(t)^2\,\mathrm{d}t$ soit nulle pour tout $x>0$ alors H_f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Sinon il existe $x_0>0$ tel que $\displaystyle\int_0^{x_0} H_f(t)^2\mathrm{d}t>0$ et par positivité de H_f^2, $\displaystyle\int_0^x H_f(t)^2\mathrm{d}t>0$ pour tout $x\geqslant x_0$. Ainsi, pour tout $x\geqslant x_0$, d'après la question précédente, on obtient $\displaystyle\sqrt{\int_0^x H_f(t)^2\,\mathrm{d}t}\leqslant 2\sqrt{I}$ donc :

$$\int_0^x H_f(t)^2\,\mathrm{d}t\leqslant 4I.$$

   Les intégrales partielles de H_f^2 sont majorées : H_f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. □

Exercice 15

Soient a et b réels, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f=\ell\in\mathbb{R}$ et telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour u v dans $\mathbb{R}$ on pose : $\displaystyle J(u,v)=\int_u^v f(a+x)-f(b+x)\,\mathrm{d}x$

1. Démontrer que pour tout u et v réels on a : $\displaystyle J(u,v)=\int_{u+a}^{u+b} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{v+a}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire que $\displaystyle I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(a+x)-f(b+x)\,\mathrm{d}x$ converge ainsi que la valeur de cette intégrale.

1. Soient u et v des réels. On a :

$$\begin{aligned}
J(u,v) &= \int_u^v f(a+x)-f(b+x)\,\mathrm{d}x=\int_u^v f(a+x)\,\mathrm{d}x-\int_u^v f(b+x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{u+a}^{v+a} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{u+b}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(changements de variables évidents))}\\
&= \int_{u+a}^{u+b} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{u+b}^{v+a} f(t)\,\mathrm{d}t-\left(\int_{u+b}^{v+a} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{v+a}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \int_{u+a}^{u+b} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{v+a}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

• Soit $v\in\mathbb{R}$. On a :

$$\int_{v+a}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{v+a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{v+a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il vient

$$\int_{v+a}^{v+b} f(t)\,\mathrm{d}t\underset{v\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

• Notons F la fonction définie pour x réel par $\displaystyle F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme f est continue, F est de classe C^1 avec $F'=f$.

Soit $u\in\mathbb{R}$. On a : $\displaystyle\int_{u+a}^{u+b} f(t)\,\mathrm{d}t=F(u+b)-F(u+a)$. D'après l'inégalité des accroissements finies appliquée F, il existe c_u entre $a+u$ et $b+u$ tel que :

$$F(u+b)-F(u+a)=f(c_u)(b-a).$$

Si maintenant $u \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, par sandwich $c_u \underset{u\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et par composition des limites, $f(c_u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi :

$$\int_{u+a}^{u+b} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{u\to-\infty}{\longrightarrow} \ell(b-a).$$

Conclusion. Avec les deux points précédents, dans l'expression de $J(u,v)$ obtenue à la question précédente, en faisant tendre u vers $-\infty$ et v vers $+\infty$, on est assuré que l'intégrale impropre $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(a+x) - f(b+x)\,\mathrm{d}x$ converge de valeur $I(a,b) = \ell(b-a)$.

Exercice 16
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, positive, lipschitzienne de rapport k telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Démontrer que f admet une limite nulle en 0.
2. Démontrer que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

1. Dire que f admet une limite nulle en $+\infty$ signifie que :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists A \geqslant 0)(\forall x \geqslant A)(|f(x)| \leqslant \varepsilon).$$

On raisonne par l'absurde et on suppose donc

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall A \geqslant 0)(\exists x \geqslant A)(f(x) > \varepsilon).$$

2. Comme f est de limite nulle en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Pour tout $x \geqslant A$ il vient alors $0 \leqslant f(x)^2 \leqslant f(x)$: ainsi, par domination, f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 20
Soit, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n}$.

1. Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \to \infty$.
2. En posant $u = \dfrac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$. Puis, en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1.
3. Calculer I_n.

1. Comme $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{4n}}$ et que $4n \geqslant 4$ pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc I_n existe. Par ailleurs, la suite numérique de terme général $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^4)^n}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+x^4} \in [0,1[$ pour tout $x > 0$; elle converge donc vers zéro. On en déduit que la suite (f_n) converge vers la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$, notée f, continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. On dispose aussi de l'hypothèse de domination :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [0,+\infty[, \quad |f_n(x)| \leqslant f_1(x),$$

où f_1 est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée affirme alors que

$$\lim_{+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. La fonction $\psi\colon u \in]0,+\infty[\mapsto \frac{1}{u} \in]0,+\infty[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de changement de variable dans les intégrales impropres affirme alors que les deux intégrales $\int_0 +\infty[f_1$ et $-\int_0^{+\infty} f_1 \circ \psi \times \psi'$ sont de même nature et, dans le cas de convergence, qu'elles sont égales. Ici, on obtient

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1/u^2}{1+(1/u^4)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+1}\,\mathrm{d}u.$$

Ce n'est pas le résultat attendu, mais on dispose maintenant de deux expressions de I_1 : celle qu'on vient d'obtenir ci-dessus, ainsi que la définition d'origine. En remarquant que $I_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_1)$, et en utilisant ces deux expressions, on obtient

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2+1}{u^4+1}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $\theta\colon u \in]0,+\infty[\mapsto u - \frac{1}{u} \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, car $\theta'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} > 0$, $\lim_0 \theta(u) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \theta(u) = +\infty$. On peut donc effectuer la changement de variable $u = \theta^{-1}(v)$ dans l'intégrale I_1. Voici quelques calculs préliminaires, où l'on a posé $v = \theta(u) = u - \frac{1}{u}$:
— On a $v^2 = u^2 - 2 + \frac{1}{u^2}$ donc $u^2v^2 = u^4 + 1 - 2u^2$, donc $u^4 + 1 = u^2(2+v^2)$.
— Comme $\mathrm{d}v = (1 + \frac{1}{u^2})\,\mathrm{d}u$, on a $(u^2+1)\,\mathrm{d}u = u^2\,\mathrm{d}v$.
Le théorème de changement de variable mène à

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}v}{u^2(2+v^2)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{2+v^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. On va établir une relation de récurrence portant sur les intégrales I_n, en écrivant que $1 = 1 + x^4 - x^4$, puis en effectuant une intégration par parties, en dérivant x et en intégrant $\frac{x^3}{(1+x^4)^n}$. On effectue le calcul sur $[0,a]$, puis on fait tendre a vers $+\infty$. Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n} &= \int_0^a \frac{1+x^4-x^4}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}} - \int_0^a x \times \frac{x^3}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}} - \left[\frac{x}{4(-n+1)(1+x^4)^{n-1}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{4(-n+1)(1+x^4)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}} + \frac{a}{4(n-1)(1+a^4)^{n-1}} - \frac{1}{4(n-1)}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 2$, le terme central tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et on obtient

$$I_n = \left[1 - \frac{1}{4(n-1)}\right] I_{n-1} = \frac{4n-5}{4(n-1)} I_{n-1}.$$

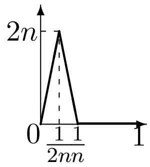
On en déduit que

$$I_n = \frac{(4n-5)\times(4n-9)\times\cdots\times 7\times 3}{4(n-1)\times 4(n-2)\times\cdots\times 8\times 4} I_1 = \frac{(4n-5)\times(4n-9)\times\cdots\times 7\times 3}{4^{n-1}(n-1)!}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 21

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers 0 et que la suite $\left(\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est bornée. Est-il vrai que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$?

Non, et voici un contre-exemple : pour $n \geqslant 2$, on considère la fonction f_n affine par morceaux définie par $f(0) = f(\frac{1}{n}) = f(1) = 0$ et $f(\frac{1}{2n}) = 2n$. Le graphe de f_n présente, au voisinage de zéro, un pic triangulaire de base horizontale $\frac{1}{n}$ et de hauteur $2n$.



La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, on a $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (aire d'un triangle) pour tout n, donc la suite étudiée est bornée, mais elle ne converge pas vers zéro. En modifiant la hauteur du pic, par exemple en prenant $f(\frac{1}{2n}) = 2n$ si n est pair et $f(\frac{1}{2n}) = n$ si n est impair, on obtient même un cas où la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée et n'a pas de limite, puisque ce terme général vaut alternativement 1 et $\frac{1}{2}$ en fonction de la parité de n.