Feuille d'exercices n° 4. Intégration.

Exercice 1

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Démontrer que :

$$\int_x^{2x} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 3

Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Démontrer que $g : t \mapsto \frac{\sqrt{f(t)}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}} dx.$

2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx.$

3. $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx.$

Exercice 5 (Intégrales de Bertrand)

Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha, \beta} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt.$

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha, \beta}$ est convergente.

2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha, \beta}$ est divergente.

3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = e^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1, \beta}$.

Exercice 6 (Changement de variable)

Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales impropres suivantes.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1}.$ On pourra faire un changement de variables évident...

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$ On pourra faire le changement de variable $y = \frac{1}{x} \dots$

3. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$. On pourra faire successivement les changements de variables $y = \sqrt{x}$ et $y = \cos t$.
4. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^2 dx$. On pourra faire le changement de variable $u = \arctan x \dots$

Exercice 7

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ entier l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x} dx$ converge.
2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$, démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^1 t^k \ln t dt = \int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t} dt + I_n,$$

où I_n est une intégrale que l'on précisera.

- b) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{1-x} dx$.

Exercice 8

Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$.

Exercice 9

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique. On note

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \text{ et on considère } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } g(x) = \int_0^x f(t) dt - xI.$$

- a) Montrer que g est de classe C^1 et T -périodique.
- b) Pour $a > 0$ que dire de $\int_a^{+\infty} \frac{f(t) - I}{t} dt$?
- c) Montrer que $h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t) - I}{t} dt =_{+\infty} O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ on note : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n t}{t^2} dt$ et $I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$.

1. Justifier que l'intégrale impropre I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'elle est strictement positive.
2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, justifier de la convergence de l'intégrale impropre $I(s)$ et exprimer sa valeur en fonction de $|s|$ et I_1 .

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier, à l'aide du changement de variables $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale impropre

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{u\sqrt{u}} du,$$

et déterminer une relation entre I_n et J_n .

- b) Établir, pour tout $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$, l'inégalité : $\left| 1 - \left(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n \right| \leq u$.
- c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et une constante $A \geq 0$ telles que pour tout $x \geq 0$: $g(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt$.

En considérant $h : x \mapsto \exp\left(-\int_0^x f(t) dt\right) \left(A + \int_0^x f(t)g(t) dt\right)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que g est bornée.

Exercice 12

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = +\infty$. Démontrer que $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle les fonctions f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
 - a) Démontrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 - b) Démontrer que si $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x) = +\infty$.
 - c) Qu'en conclure ?

Exercice 13

Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, telle que l'intégrale impropre $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$.

Exercice 14 (Transformée de Hardy)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue telle que $I = \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$ converge. On note $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et on considère :

$$H_f : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Démontrer que H_f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction encore notée H_f .
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_0^x H_f(t)^2 dt = -F(x)H_f(x) + 2 \int_0^x f(t)H_f(t) dt$$

3. En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $\int_0^x H_f(t)^2 dt \leq 2\sqrt{I} \sqrt{\int_0^x H_f(t)^2 dt}$.

4. Démontrer que $\int_0^{+\infty} H_f(t)^2 dt$ converge avec $\int_0^{+\infty} H_f(t)^2 dt \leq 4I$.

Exercice 15

Soient a et b réels, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$ et telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Pour u, v dans $\mathbb{R}$ on pose : $J(u, v) = \int_u^v f(a+x) - f(b+x) dx$

1. Démontrer que pour tout u et v réels on a : $J(u, v) = \int_{u+a}^{u+b} f(t) dt - \int_{v+a}^{v+b} f(t) dt$.
2. En déduire que $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a+x) - f(b+x) dx$ converge ainsi que la valeur de cette intégrale.

Exercice 16

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, positive, lipschitzienne de rapport k telle que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. Démontrer que f admet une limite nulle en 0.
2. Démontrer que f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 17

Calculer la limite de $I_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n) dx$.

Exercice 18

On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de (I_n) .

Exercice 19

Démontrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 20

Soit, pour $n \geq 1$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^n}$.

1. Démontrer l'existence de I_n et trouver sa limite quand $n \rightarrow \infty$.
2. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$. Puis, en posant $v = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1 .
3. Calculer I_n .

Exercice 21

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers 0 et que la suite $\left(\int_0^1 f_n(t) dt\right)$ est bornée. Est-il vrai que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0$?