

Feuille d'exercices n° 2. Algèbre linéaire II.

Quelques corrections

Avertissement. Dans toute cette feuille d'exercice, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 3

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on considère l'application $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$T(f)(x) = \int_0^x f(4(t - t^2))dt.$$

- a. Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E .
- b. T est-il surjectif? injectif?

- a) • On note $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = 4(t - t^2)$. Une étude de fonction montre que $h([0, 1]) = [0, 1]$. de sorte que pour f dans E , la composée $f \circ h$ est correctement définie.
Ainsi, comme pour tout f dans E , $f \circ h$ est continue sur $[0, 1]$, $T(f)$ est correctement définie et de classe C^1 (théorème fondamental), et vérifie $[T(f)]' = f \circ h$.
En, particulier pour tout $f \in E$, on a $T(f) \in E$.
• La linéarité est pour le lecteur.
- b) • Pour tout f dans E , $T(f)$ est de classe C^1 mais il existe dans E des fonctions qui ne sont pas dérivables (en donner un exemple!), donc qui ne peuvent être des images : $T(f)$ n'est pas surjectif.
• Si $f \in \ker T$ alors $T(f) = 0$ donc, en dérivant, $f \circ h = 0$. Mais $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est surjective : il en résulte rapidement que f est nulle. Ainsi T est injectif.

Exercice 7 (Intersection d'hyperplans)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension n , $p \geq 1$ entier, $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ et

$$f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{k}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que f est surjective si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre de E^* .
- Démontrer que : $\ker f = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \ker f_i$.
- En déduire la dimension de $\bigcap_{1 \leq i \leq p} \ker f_i$ lorsque f est surjective.

- Supposons que φ soit surjective. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_p g_p = 0.$$

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Le vecteur e_i admet un antécédent v_i dans E et, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ on a : $g_j(v_i) = \delta_{i,j}$. Ainsi, pour tout j dans $\{1, \dots, p\}$, il vient :

$$0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i(v_j) = \alpha_j.$$

La famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre dans E^* .

- Supposons que la famille $(g_1, \dots, g_p)$ soit libre dans E^* . On raisonne par l'absurde et on suppose que φ n'est pas surjective : on a donc $\dim \operatorname{Im} f \leq p - 1$. Ainsi $\operatorname{Im} \varphi$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.

On considère alors une équation $a_1x_1 + \dots + a_px_p = 0$ de cet hyperplan H , où $a_1, \dots, a_p$ sont des réels **non tous nuls**.

On a alors, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) \in H$, donc :

$$a_1g_1(x) + \dots + a_pg_p(x) = 0.$$

Il en résulte que $a_1g_1 + \dots + a_pg_p = 0$, ce qui contredit notre hypothèse sur la liberté de la famille $(g_1, \dots, g_p)$.

2. On a de suite : $\ker \varphi = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \ker g_i$.
3. Si φ est surjective, le théorème du rang affirme que $\dim \ker f = n - p$.

Exercice 8 (Le lemme des cinq)

Soient E, F, G des espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ des applications linéaires. On dit que la suite :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

est exacte lorsque $\operatorname{Im} f = \ker g$. On considère « l'échelle » suivante d'espaces vectoriels et d'applications linéaires où les lignes sont exactes et où les carrés sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5 \end{array}$$

On suppose que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ et φ_5 sont des isomorphismes. Montrer que φ_3 est un isomorphisme.

- Montrons que φ_3 est surjective. On veut donc démontrer que tout élément y_3 de E_3 admet un antécédent par φ_3 .
Fixons y_3 dans E_3 . Comme $\operatorname{Im} g_3 = \ker g_4$ on a :

$$g_4 \circ g_3(y_3) = 0 \quad (\heartsuit)$$

Mais φ_4 est un isomorphisme : il existe donc x_4 dans E_4 tel que $g_3(y_3) = \varphi_4(x_4)$. Avec $(\heartsuit)$ on obtient alors : $g_4 \circ \varphi_4(x_4) = 0$.

Comme les carrés sont commutatifs, il vient $\varphi_5 \circ f_4(x_4) = 0$. Mais φ_5 est un isomorphisme donc $f_4(x_4) = 0$ et ainsi $x_4 \in \ker f_4 = \operatorname{Im} f_3$: il existe alors $x_3 \in E_3$ tel que $f_3(x_3) = x_4$.

On a alors $\varphi_4 \circ f_3(x_3) = \varphi_4(x_4) = g_3(y_3)$. Par commutativité des carrés, il vient :

$$g_3 \circ \varphi_3(x_3) = g_3(y_3)$$

donc, par linéarité de g_3 , on peut dire que $y_3 - \varphi_3(x_3)$ est dans $\ker g_3 = \operatorname{Im} g_2$. On dispose alors de $y_2 \in F_2$ tel que

$$g_2(y_2) = y_3 - \varphi_3(x_3) \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

Comme φ_2 est un isomorphisme, il existe $x_2 \in E_2$ tel que $\varphi_2(x_2) = y_2$ et ainsi, avec $(\heartsuit\heartsuit)$, on obtient :

$$g_2 \circ \varphi_2(x_2) = y_3 - \varphi_3(x_3)$$

Les carrés étant commutatifs, on a donc $\varphi_3 \circ f_2(x_2) = y_3 - \varphi_3(x_3)$ et ainsi, par linéarité de φ_3 il vient le résultat tant attendu et que l'on n'espérait plus :

$$\boxed{y_3 = \varphi_3(f_2(x_2) + x_3)}$$

ce qui démontre que φ_3 est bien surjective.

- L'injectivité de φ_3 se traite de la même manière...

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$. Démontrer que $\text{Im } f$ admet un supplémentaire f -stable si et seulement si $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$ et que dans ce cas $\ker f$ est l'unique supplémentaire f -stable de $\text{Im } f$.

• Supposons que $\text{Im } f$ admet un supplémentaire f -stable que l'on note F et montrons qu'alors $F = \ker f$ (ce qui démontrera que $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$ puisque la somme $\text{Im } f + F$ est directe).

Soit x dans F . Comme F est f -stable, $f(x) \in F$. Ainsi $f(x) \in \text{Im } f \cap F = \{0\}$ donc $x \in \ker f$ et on a déjà l'inclusion $F \subset \ker f$.

Puis le théorème du rang affirme que $\dim \ker f = n - \dim \text{Im } f$ et de $E = \text{Im } f \oplus F$ on tire $\dim F = n - \dim \text{Im } f$. Il en résulte que $\ker f$ et F ont même dimension et avec $F \subset \ker f$ on obtient : $\ker f = F$.

• Supposons maintenant que $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$ et montrons que f admet un supplémentaire f -stable. Le théorème du rang affirme que $n = \dim \text{Im } f + \dim \ker f$; comme $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$ on en déduit que :

$$E = \text{Im } f \oplus \ker f$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que $\ker f$ est f stable ce qui ne pose pas de problème. $\square$

Exercice 10 (Un résultat de factorisation)

Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g \circ h = f$
- (ii) $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.

• $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g \circ h = f$ et montrons que $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.

Soit $y \in \text{Im } f$. Il existe alors x dans E tel que $f(x) = y$ donc $g \circ h(x) = y$ et ainsi $g(h(x)) = y$. Il en résulte que y admet un antécédent par g (qui est $h(x)$) donc $y \in \text{Im } g$.

On a donc bien $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.

• $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons $\text{Im } f \subset \text{Im } g$ et montrons qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $g \circ h = f$. On est rusé comme un singe et on se rappelle que pour définir une application linéaire il suffit de la définir sur une base.

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Comme $\text{Im } f \subset \text{Im } g$, alors pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ on a $f(e_i) \in \text{Im } g$ et ainsi il existe v_i dans F tel que $f(e_i) = g(v_i)$.

Soit h l'unique élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $h(e_i) = v_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On a alors :

$$f(e_i) = g \circ h(e_i) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

et ainsi par linéarité il vient : $f = g \circ h$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer $\ker f$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$ entier on a : $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire $\text{Im } f$.
4. Soit F l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ puis que $\ker f$ et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Pour le lecteur.

2. • Soit $P \in \ker f$. On a alors $P(X+1) = P(X)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il vient $P(k+1) = P(k)$ et une récurrence immédiate (à écrire) donne $P(k) = P(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Ainsi, le polynôme $Q = P - P(0)$ admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul. Il en résulte que P est constant.

• Les polynômes constant sont dans $\ker f$.

Conclusion. $\ker f = \mathbb{R}_0[X]$.

3. **Question subtile et très jolie !**

• Soit $n \geq 1$ entier. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En écrivant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - a_n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, on peut dire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f . Notons alors f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$. On a clairement $\text{Im } f_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après ce qui précède. De plus, le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Im } f_n = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker f_n.$$

Mais il est immédiat de vérifier que $\ker f_n = \ker f \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1.

Il en résulte que $\text{Im } f_n$ est de dimension n . Comme $\text{Im } f_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut conclure que $\text{Im } f_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Cela répond à la première partie de la question puisque $\text{Im } f_n = f(\mathbb{R}_n[X])$.

• Prenons maintenant $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_N[X]$ et ainsi $Q \in \text{Im } f_{N+1}$. Il existe alors $P \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ tel que $Q = f_{N+1}(P) = f(P)$, de sorte que $\mathbb{R}[X] \subset \text{Im } f$. L'inclusion réciproque étant évidente, $\text{Im } f = \mathbb{R}[X]$ (ce qui prouve que f est surjectif).

4. • Soit $\delta_0 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta_0(P) = P(0)$. Cette application est linéaire et $F = \ker \delta_0$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

• Supposons que $\mathbb{R}[X] = F + \ker f$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On peut donc écrire $P = Q + R$ avec $Q \in F$ et $R \in \ker f = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $P(0) = R(0)$, puisque $Q \in F$. Il vient donc, comme R est constant $R = P(0)$ et $Q = P - P(0)$.

Conclusion partielle : si $\mathbb{R}[X] = F + \ker f$ alors $\mathbb{R}[X] = F \oplus \ker f$.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $Q = P - P(0)$ et $R = P(0)$. On a de suite $P = Q + R$ ainsi que $Q \in F$ et $R \in \ker f$. Il en résulte que $\mathbb{R}[X] = F + \ker f$.

Conclusion. $\mathbb{R}[X] = F \oplus \ker f$.

Exercice 12

Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1. Démontrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé A . On a $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a) \neq 0$ et on a $\text{Im } f \subset \ker f$. Cette dernière inclusion implique que $\ker f$ est de dimension 2 en utilisant le théorème du rang. Puis $f(a) \in \ker f$, puisque $f^2 = 0$. On complète $f(a)$ en une base $(f(a), b)$ de $\ker f$.
J'affirme alors que la famille $\beta = (f(a), c, a)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons que α, β, γ dans $\mathbb{R}^3$ vérifient :

$$\alpha f(a) + \beta c + \gamma a = 0.$$

En appliquant f , il vient : $\gamma f(a) = 0$. Comme $f(a) \neq 0$, on a $\gamma = 0$ et ainsi :

$$\alpha f(a) + \beta c = 0.$$

Mais la famille $(f(a), c)$ est libre, donc $\alpha = \beta = 0$.

Il en résulte que β est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Mais la matrice de f dans β est exactement la matrice J : celle-ci est donc semblable à A .

2. • L'application $g : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $g(M) = AM + MA$ est linéaire : son noyau, qui est $\mathcal{F}$, est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
• Selon la question précédente, A et J sont semblables : il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$. De plus l'application $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme linéaire. En effet, la linéarité est immédiate (à écrire !) et si $\psi : M \mapsto PMP^{-1}$ l'application $\varphi \circ \psi$ est l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow AM + MA = 0 \\ &\Leftrightarrow PJP^{-1}M + MPJP^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow JP^{-1}MP + P^{-1}MPJ = 0 \\ &\Leftrightarrow J\varphi(M) + \varphi(M)J = 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{G} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid NJ + JN = 0\}$. Comme φ est un isomorphisme, $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{G}$.

Prenons alors $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{G} &\Leftrightarrow JN + NJ = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (N)_{3,1} & (N)_{3,2} & (N)_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & (N)_{1,1} \\ 0 & 0 & (N)_{1,2} \\ 0 & 0 & (N)_{1,3} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $\mathcal{G}$ est l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} (N)_{3,1} &= 0 \\ (N)_{3,2} &= 0 \\ (N)_{3,3} + (N)_{1,1} &= 0 \\ (N)_{1,2} &= 0 \\ (N)_{1,3} &= 0 \end{cases}.$$

Une matrice de $\mathcal{G}$ est donc décrite par $9 - 5 = 4$ paramètres : $\dim \mathcal{G} = 4$ et $\dim \mathcal{F} = 4$.

Exercice 13

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \text{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.

1. Comme u est de rang 1, $\dim \operatorname{Im} u = 1$.

- Supposons que $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$. Vie le théorème du rang on a $\dim \operatorname{Im} u + \dim \ker u = n$ donc

$$E = \operatorname{Im} u \oplus \ker u$$

On prend alors (e_1) base de $\operatorname{Im} u$ et $\{e_2, \dots, e_n\}$ base de $\ker u$. La famille :

$$\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$$

est alors une base de E . Puis $u(e_1) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(e_1)$ donc il existe λ réel tel que $u(e_1) = \lambda e_1$ et ainsi :

$$A = [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors } A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda A.$$

et ainsi $\boxed{u^2 = \lambda u}$

- Si maintenant $\operatorname{Im} u \cap \ker u$ contient un vecteur non nul e_1 alors ce vecteur engendre $\operatorname{Im} u$ et on a donc $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ de sorte que $u^2 = 0$: il existe bien λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.

Autre méthode.

Comme $\operatorname{Im} u$ est de dimension 1, on peut écrire $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(\varepsilon)$ où ε est un vecteur fixé de E . On a alors $u(\varepsilon) \in \operatorname{Im} u$, et ainsi il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $u(\varepsilon) = \lambda \varepsilon$.

Prenons maintenant x dans E . Comme $u(x) \in \operatorname{Im} u$ on dispose de α_x réel tel que $u(x) = \alpha_x \varepsilon$. On a alors :

$$u^2(x) = u(u(x)) = u(\alpha_x \varepsilon) = \alpha_x u(\varepsilon) = \lambda \alpha_x \varepsilon = \lambda u(x)$$

Ceci étant valable pour tout x dans E on a bien $\boxed{u^2 = \lambda u}$.

2. Posons $\boxed{v = u - \operatorname{Id}_E}$. On cherche un polynôme annulateur de v avec terme constant non nul. On a :

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - 2u + \operatorname{Id}_E = \lambda u - 2u + \operatorname{Id}_E = (\lambda - 2)u - (\lambda - 2)\operatorname{Id}_E + (\lambda - 2)\operatorname{Id}_E + \operatorname{Id}_E \\ &= (\lambda - 2)v + (\lambda - 1)\operatorname{Id}_E \end{aligned}$$

donc $v^2 - (\lambda - 2)v - (\lambda - 1)\operatorname{Id}_E = 0$. Il en résulte, puisque $\lambda - 1 \neq 0$ que :

$$v \circ \left(\frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\operatorname{Id}_E) \right) = \operatorname{Id}_E = \left(\frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\operatorname{Id}_E) \right) \circ v$$

Comme $\frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\operatorname{Id}_E) \in \mathcal{L}(E)$, on peut donc dire que v est inversible avec :

$$\boxed{v^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\operatorname{Id}_E)}.$$

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension $n \geq 2$. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.

Démontrer qu'il existe une base β de E telle que la première colonne de la matrice de f dans β soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Avec le lemme de Schur (à redémontrer !), comme f n'est pas une homothétie, il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0))$ soit une famille libre. On complète cette famille en une base β de E : cette base convient.

Exercice 15

Pour $k \in \{0, \dots, 3\}$ on considère la fonction $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_k(x) = x^k e^x$. On pose $\mathcal{F}_3 = \text{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

1. Déterminer une base β de $\mathcal{F}_3$.
2. Soient α réel et Φ l'application qui à f dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Phi(f) : x \mapsto \int_{\alpha}^x f(t) dt$.
Démontrer que Φ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.
3. Soit Ψ l'application qui à f dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Psi(f) : x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
Démontrer que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$ et préciser la matrice de Ψ dans β .

1. La famille $\beta = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est libre. En effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que :

$$\sum_{i=0}^3 \lambda_i f_i = 0.$$

Pour tout x réel on a alors $\sum_{i=0}^3 \lambda_i x^i e^x = 0$ et comme $\exp > 0$, il vient : $\sum_{i=0}^3 \lambda_i x^i = 0$.

Il en résulte que le polynôme $\sum_{i=0}^3 \lambda_i X^i$ a une infinité de racines : il est nul, et donc tous ses coefficients sont nuls.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La famille β est donc libre et engendre $\mathcal{F}_3$: c'est une base de $\mathcal{F}_3$.

2. Soient α réel et Φ l'application qui à f dans $\mathcal{F}_3$ associe : $\Phi(f) : x \mapsto \int_{\alpha}^x f(t) dt$.
Démontrer que Φ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.
 - Notons que Φ est linéaire de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (cela résulte sans trop de difficultés de la linéarité de l'intégrale...).
 - On a, pour tout x réel :

$$\Phi(f_0)(x) = \int_{\alpha}^x e^t dt = e^x - e^{\alpha} = f_0(x) - e^{\alpha}.$$

Mais la fonction constante strictement positive $x \mapsto e^{\alpha}$ n'est pas dans $\mathcal{F}_3$: $\Phi(f_0) \notin \mathcal{F}_3$.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $x^k e^{x-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$. Ainsi les éléments de $\mathcal{F}_3$ ont une limite nulle en $-\infty$ (par règle opératoire sur les limites). On peut donc en conclure qu'aucune fonction constante non nulle n'est dans $\mathcal{F}_3$.

Il en résulte que Φ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.

3. • Montrons que Ψ est linéaire. Soient f, g dans $\mathcal{F}_3$ et λ réel. **Pour tout x réel** on a :

$$\begin{aligned} \Psi(f + \lambda g)(x) &= \int_{-\infty}^x (f + \lambda g)(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt + \lambda \int_{-\infty}^x g(t) dt \\ &= \Psi(f)(x) + \lambda \Psi(g)(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\Psi(f + \lambda g) = \Psi(f) + \lambda \Psi(g)$.

- Déterminons, pour tout k dans $\{0, \dots, 4\}$, $\Psi(f_k)$.

Pour tout x réel on a $\Psi(f_0)(x) = \int_{-\infty}^x e^t dt = e^x$ donc $\Psi(f_0) = f_0$.

Puis, fixons k dans $\{1, 2, 3\}$. Pour tout x réel on a :

$$\begin{aligned}\Psi(f_k)(x) &= \int_{-\infty}^x t^k e^t dt = \underbrace{\{t^k e^t\}_{-\infty}^x}_{IPP} - k \int_{-\infty}^x t^{k-1} e^t dt \\ &= x^k e^x - k \int_{-\infty}^x t^{k-1} e^t dt\end{aligned}$$

De là $\Psi(f_k) = f_k - k\Psi(f_k - 1)$. Il vient donc :

- $\Psi(f_1) = f_1 - \Psi(f_0) = f_1 - f_0$
- $\Psi(f_2) = f_2 - 2\Psi(f_1) = f_2 - 2(f_1 - f_0)$
- $\Psi(f_3) = f_3 - 3\Psi(f_2) = f_3 - 3f_2 + 6f_1 - 6f_0$.

Les images des éléments de β par Ψ appartiennent donc à $\mathcal{F}_3$: Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.

La matrice de Ψ dans β est alors : $[f]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Soient m un entier naturel strictement supérieur à 2, n un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\frac{m}{2}$. On note J l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à m . Soit $A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide sur lequel A ne s'annule pas.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$ on note $f(P)$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$: $f(P) = AP' - PA'$.

1. a) Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer en fonction de m et n la valeur maximale p du degré du polynôme $f(P)$.
b) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que QA soit élément de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer $f(QA)$.
d) Montrer qu'un polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$ est dans $\ker f$, le noyau de f , si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $\left(\frac{P}{A}\right)'(x) = 0$.
En déduire $\ker f$.
e) Déterminer le rang de f .
 2. Pour tout i élément de J , on pose $Y_i = f(X^i)$.
a) Montrer que la famille de polynômes $(Y_i)_{i \in J \setminus \{n\}}$ est une base de $\text{Im } f$, l'image de f .
b) En calculant $f(A)$, déterminer les coordonnées de Y_n dans cette base.
 3. a) Pour tout $i \in J$, étudier le degré du polynôme Y_i .
b) Déterminer la valeur minimale du degré d'un polynôme S non nul de $\text{Im } f$.
c) i) En utilisant la question 1)c), montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ divisible par A^2 appartient à $\text{Im } f$.
ii) En déduire qu'un polynôme S de $\mathbb{R}_p[X]$ appartient à $\text{Im } f$ si et seulement si le reste R de la division euclidienne de S par A^2 appartient à $\text{Im } f$.
iii) Pour tout polynôme S de $\text{Im } f$, déterminer alors la valeur maximale du degré de R .
 4. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Déterminer l'ensemble des primitives sur I de $x \mapsto \frac{S(x)}{(A(x))^2}$ avec $S = f(P)$.
 5. Dans cette question, m est un entier naturel strictement supérieur à 6 et $A = X^3 - X + 1$.
a) Calculer Y_0 , Y_1 et Y_2 et montrer que le polynôme $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1$ est élément de $\text{Im } f$.
b) Déterminer une primitive sur I de $x \mapsto \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2}$.
1. a. $f(P) = AP' - PA'$ est au plus de degré $\deg A + \deg P - 1 \leq n + m - 1$. Cette valeur est atteinte pour $P = X^m$ car le terme de plus haut degré de $f(X^m)$ est $mX^nX^{m-1} - nX^{n-1}X^m = (m-n)X^{n+m-1}$ qui est de degré $m+n-1$ (car on a $m-n \neq 0$ puisque $m < \frac{n}{2}$).

Conclusion : La valeur maximale du degré de $f(P)$ est donc $p = m + n - 1$.

- b. Par définition de p à la question précédente, on a $f : \mathbb{R}_m[X] \rightarrow \mathbb{R}_p[X]$. La linéarité de f est immédiate (mais à vérifier).

Conclusion : f est une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ vers $\mathbb{R}_p[X]$.

- c. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $QA \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on a :

$$f(QA) = A(QA)' - (QA)A' = Q'A^2$$

- d. Soit P dans $\mathbb{R}_m[X]$. Alors $P \in \ker f$ si et seulement si $AP' - PA' = 0$ i.e. (puisque I est infini) si et seulement si pour tout $x \in I$ on a $A(x)P'(x) - P(x)A'(x) = 0$.

Puisque A ne s'annule pas sur I cette dernière assertion est équivalente à : pour tout $x \in I$,
$$\frac{A(x)P'(x) - P(x)A'(x)}{(A(x))^2} = 0$$

ce qui signifie exactement que pour tout $x \in I$, $\left(\frac{P}{A}\right)'(x) = 0$.

Il vient donc $P \in \ker f$ **si et seulement si** (puisque I est un intervalle) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on a $\frac{P(x)}{A(x)} = \lambda$ **si et seulement si** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on a $P(x) = \lambda A(x)$ i.e. (car I est infini) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda A$.

Conclusion : $\ker f = \text{vect}(A)$.

- e. D'après la formule du rang, et comme on vient de voir que $\dim \ker f = 1$ (car $A \neq 0$), il vient que $\boxed{\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_m[X] - 1 = m}$.

2. a. La famille $(1, X, \dots, X^{n-1}, A, X^{n+1}, \dots, X^m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$ car les degrés sont échelonnés de 0 à m . Il vient :

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-1}), f(A), f(X^{n+1}), \dots, f(X^m)) \\ &= \text{vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-1}), 0, f(X^{n+1}), \dots, f(X^m)) \\ &= \text{vect}(f(X^i))_{i \in J \setminus \{n\}} = \text{vect}(Y_i)_{i \in J \setminus \{n\}} \end{aligned}$$

la famille de $m-1$ vecteurs $(Y_i)_{i \in J \setminus \{n\}}$ engendre donc $\text{Im } f$ qui est de dimension $m-1$, donc

$$\boxed{(f(X^i))_{i \in J \setminus \{n\}} = (Y_i)_{i \in J \setminus \{n\}} \text{ est une base de } \text{Im } f}.$$

- b. On a $f(A) = 0$ d'une part. Or d'autre part :

$$\begin{aligned} f(A) &= f(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0) \\ &= f(X^n) + a_{n-1}f(X^{n-1}) + \dots + a_1f(X) + a_0f(1) \\ &= Y_n + a_{n-1}Y_{n-1} + \dots + a_1Y_1 + a_0Y_0 \end{aligned}$$

Il vient ainsi :

$$\boxed{Y_n = -a_0Y_0 - a_1Y_1 - \dots - a_{n-1}Y_{n-1} + 0.Y_{n+1} + \dots + 0.Y_m}.$$

3. a. Pour tout $i \in J$ on a $Y_i = iAX^{i-1} - A'X^i$ qui est un polynôme de degré au plus $n+i-1$ (≥ 0 car $n \geq 1$) et dont le terme de degré $n+i-1$ est $(i-n)X^{n+i-1}$. Ainsi $\boxed{\text{pour tout } i \in J \setminus \{n\} \text{ } Y_i \text{ est de degré } n+i-1 \text{ (car } i-n \neq 0)}$.

Maintenant pour $i = n$ on a $Y_n = -a_0Y_0 - a_1Y_1 - \dots - a_{n-1}Y_{n-1}$ et (on vient de le dire) $\deg Y_0 = n-1 < \deg Y_1 = n < \dots < \deg Y_{n-1} = 2n-2$. Ainsi :

— **premier cas**, $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$ (i.e. $A = X^n$) alors $Y_n = 0$ et $\boxed{\deg Y_n = -\infty}$.

— **deuxième cas**, il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $a_k \neq 0$ (i.e. $A \neq X^n$) alors

$$\boxed{\deg Y_n = n-1 + \max\{k \in \{0, \dots, n-1\} / a_k \neq 0\}}.$$

- b. Si $S \in (\text{Im } f) \setminus \{0\}$, alors $S = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^m b_i Y_i$ où $(b_0, \dots, b_{n-1}, b_{n+1}, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$; or

$$\begin{aligned} \deg Y_0 &= n-1 < \dots < \deg Y_{n-1} = 2n-2 < \underbrace{\deg Y_{n+1}}_{=2n} \\ &< \dots < \deg Y_m = n+m-1 \end{aligned}$$

donc $\deg S = \deg Y_k (= n+k-1)$ où $k = \max \{i \in J \setminus \{n\} / b_i \neq 0\}$; en particulier $\deg S \geq n-1$. Comme de plus $\deg Y_0 = n-1$ (et $Y_0 \in \text{Im } f$), on peut donc dire que **la valeur minimale du degré d'un polynôme non nul de $\text{Im } f$ est $n-1$** .

- c. i. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ divisible par A^2 . On dispose de $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = A^2 Q_1$$

Si on prend alors un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = Q_1$ (Q est une primitive de Q_1), on a en premier lieu $QA \in \mathbb{R}_m[X]$ car $\deg P = 2 \deg A + \deg Q_1 \leq p$ donc $\deg Q_1 \leq p-2n$ d'où $\deg Q \leq p-2n+1 = m+n-1-2n+1 = m-n$ et ainsi

$$\deg AQ = \deg A + \deg Q = n + \deg Q \leq m$$

Il vient donc, avec la question 1.c. $f(AQ) = A^2 Q' = A^2 Q_1 = P$.

Conclusion. $P \in \text{Im } f$.

- ii. Soit $S \in \mathbb{R}_p[X]$. Soit R le reste de la division euclidienne de S par A^2 , Q le quotient. On a $S = A^2 Q + R$. Comme $S \in \mathbb{R}_p[X]$ on a $A^2 Q \in \mathbb{R}_p[X]$, et $A^2 Q$ est divisible par A^2 , donc, avec la question précédente, $A^2 Q \in \text{Im } f$. Ainsi :

$$S \in \text{Im } f \Leftrightarrow S - A^2 Q \in \text{Im } f \Leftrightarrow R \in \text{Im } f$$

- iii. Soit $S \in \text{Im } f$. R étant le reste de la division euclidienne de S par A^2 on a $\deg R < \deg A^2 = 2n$. De plus $R \in \text{Im } f$ donc R est combinaison linéaire de Y_i avec $i \in J \setminus \{n\}$ on a une famille $(b_i)_{i \in J \setminus \{n\}}$ de réels tels que $R = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^m b_i Y_i$. Mais comme

$$\begin{aligned} \deg Y_0 = n-1 &< \deg Y_1 = n < \dots < \deg Y_{n-1} = 2n-2 \\ &< \deg Y_{n+1} = 2n < \dots & \dots < \underbrace{\deg Y_m}_{=n+m-1} \end{aligned}$$

et que $\deg R \leq 2n-1$, il vient que $b_{n+1} = \dots = b_m = 0$ et donc que $R = \sum_{i=0}^{n-1} b_i Y_i$ et donc $\deg R \leq 2n-2$. Si on ajoute que pour $S = Y_{n-1}$ on a $R = Y_{n-1}$ de degré $2n-2$, on en conclut que :

$$\boxed{\text{la valeur maximale du degré de } R \text{ est } 2n-2}.$$

4. On a pour tout $x \in I$,

$$\frac{S(x)}{(A(x))^2} = \frac{A(x)P'(x) - P(x)A'(x)}{(A(x))^2} = \left(\frac{P}{A}\right)'(x)$$

donc les primitives sur I de $x \mapsto \frac{S(x)}{(A(x))^2}$ sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{P(x)}{A(x)} + \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. a. On a :

$$- Y_0 = -A' = -3X^2 + 1$$

- $Y_1 = A - A'X = (X^3 - X + 1) - (3X^2 - 1)X = -2X^3 + 1$
- $Y_2 = 2XA - A'X^2$ donc :

$$Y_2 = 2X(X^3 - X + 1) - (3X^2 - 1)X^2 = -X^4 - X^2 + 2X.$$

et $S = X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1 = -(-X^4 - X^2 + 2X) - 2(-2X^3 + 1) + (-3X^2 + 1)$ donc $S = -Y_2 - 2Y_1 + Y_0$ d'où $\boxed{S \in \text{Im } f}$.

- b. Avec la question précédente on a $S = f(-X^2 - 2X + 1)$; une primitive sur I de $x \mapsto \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x^3 - x + 1)^2} = \frac{S(x)}{(A(x))^2}$ est donc, avec la question 4)

$$\boxed{x \mapsto \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^3 - x + 1}}$$

Exercice 17

Dans tout l'exercice, n et N désignent des entiers supérieurs à 2.

1. On note H_n l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a) Justifier que H_n est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
 - b) Trouver un supplémentaire de H_n .
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension N et f une forme linéaire sur E .
 - a) Soit g une forme linéaire sur E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
 - (1) Il existe λ réel tel que $f = \lambda g$.
 - (2) $\ker g \subset \ker f$.
 - b) Démontrer par récurrence sur p que si $g_1, \dots, g_p$ sont des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{i=1}^p \ker g_i \subset \ker f$ alors $f \in \text{vect}(g_1, \dots, g_p)$.
 - c) On suppose dans cette question que $n < N$.
En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que si $g_1, \dots, g_n$ sont des formes linéaires indépendantes sur E alors :

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^n \ker g_i \right) = N - n.$$

1. a) tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle (puisque $\text{tr}(I_n) = n$). Par le théorème du rang $H_n = \ker \text{tr}$ est de dimension $n^2 - 1$.
- b) Toute droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendrée par une matrice de trace non nulle est un supplémentaire de H_n . En particulier $\text{vect}(I_n)$ est un supplémentaire de H_n .

En effet, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$.

— Si $M \in H_n \cap \text{vect}(A)$ alors $\text{tr}(M) = 0$ et il existe λ réel tel que $M = \lambda A$. Comme $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$, il vient $\lambda = 0$, puisque $\text{tr}(A) \neq 0$, et ainsi $M = 0$. De là : $H_n \cap \text{vect}(A) = \{0\}$.

— $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim H_n + \dim \text{vect}(A)$

Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H_n \oplus \text{vect}(A)$.

2. a) • (1) $\Rightarrow$ (2). On suppose qu'il existe λ réel tel que $f = \lambda g$. Si $x \in \ker g$ alors :

$$f(x) = \lambda g(x) = 0,$$

donc $x \in \ker f$.

• (2) $\Rightarrow$ (1). On suppose $\ker g \subset \ker f$. Si $\ker g = E$, on a $f = g = 0$ et la conclusion est immédiate.

Sinon, il existe $x_0 \in E$ tel que $g(x_0) \neq 0$. On a alors facilement (à montrer) :

$$E = \ker g \oplus \text{vect}(x_0).$$

Posons $h = f(x_0)g - g(x_0)f$. Soit $x \in E$. On écrit $x = y + \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ selon la somme directe $E = \ker g \oplus \text{vect}(x_0)$. Par hypothèse on a $f(y) = 0$ donc :

$$h(x) = f(x_0) \underbrace{(g(y) + g(x_0))}_{=0} - g(x_0) \underbrace{(f(y) + g(f_0))}_{=0} = 0.$$

Cela étant vrai quelque soit le choix de x dans E , il vient $h = 0$ et ainsi :

$$f = \underbrace{\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}_{\in \mathbb{R}} g.$$

- b) On considère, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(p)$: « Si F est un espace vectoriel réel de dimension finie, si f est une forme linéaire sur F et si $g_1, \dots, g_p$ sont des formes linéaires sur F telles que $\bigcap_{i=1}^p \ker g_i \subset \ker f$ alors $f \in \text{vect}(g_1, \dots, g_p)$. »

• La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie, d'après la question précédente.

• Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vrai pour un certain entier naturel $p \geq 1$. Supposons que F est un espace vectoriel réel et que $g_1, \dots, g_{p+1}$ et f sont des formes linéaires sur F telles que $\bigcap_{i=1}^{p+1} \ker g_i \subset \ker f$.

— Si g_{p+1} est la forme nulle alors $\ker g_{p+1} = F$ et alors $\bigcap_{i=1}^{p+1} \ker g_i = \bigcap_{i=1}^p \ker g_i$, donc $\bigcap_{i=1}^p \ker g_i \subset \ker f$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence d'où $f \in \text{vect}(g_1, \dots, g_p) = \text{vect}(g_1, \dots, g_{p+1})$.

— On suppose maintenant que g_{p+1} n'est pas la forme nulle. Alors $\ker g_{p+1}$ est un hyperplan de F . Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on note h_i la restriction de g_i à $\ker g_{p+1}$, ainsi que h la restriction de f à $\ker g_{p+1}$. Il s'agit de formes linéaires sur l'espace vectoriel de dimension finie $\ker g_{p+1}$.

Soit maintenant $x \in \ker g_{p+1}$.

On suppose que $x \in \bigcap_{i=1}^p \ker h_i$. On a alors $g_i(x) = h_i(x) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$

donc $x \in \bigcap_{i=1}^{p+1} \ker g_i \subset \ker f$. Ainsi $f(x) = 0$ donc $h(x) = 0$.

Il en résulte que $\bigcap_{i=1}^p \ker h_i \subset \ker h$.

On applique l'hypothèse de récurrence avec l'espace vectoriel $\ker g_{p+1}$. On a donc :

$h \in \text{vect}(h_1, \dots, h_p)$: il existe ainsi $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que $h = \sum_{k=1}^p \alpha_k h_k$.

Pour tout $x \in \ker g_{p+1}$ on a donc :

$$f(x) - \sum_{k=1}^p \alpha_k g_k(x) = h(x) - \sum_{k=1}^p \alpha_k h_k(x) = 0,$$

de sorte que $\ker g_{p+1} \subset \ker \left(f - \sum_{k=1}^p \alpha_k g_k \right)$. D'après la question précédente, il existe α_{p+1} réel tel que :

$$f - \sum_{k=1}^p \alpha_k g_k = \alpha_{p+1} g_{p+1}.$$

Cela permet de conclure que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

- c) Soient $g_1, \dots, g_p$ des formes linéaires indépendantes sur E . Comme $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension n , on peut compléter la famille libre $(g_1, \dots, g_p)$ en une base $\beta = (g_1, \dots, g_n)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On a alors la suite d'inclusions :

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^n \ker g_i}_{=F_0} \subset \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker g_i}_{F_1} \subset \dots \subset \underbrace{\ker g_1}_{=F_{n-1}} \subset E.$$

Supposons un instant qu'il existe $k \in \{0, \dots, n-2\}$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{n-k} \ker g_i = \bigcap_{i=1}^{n-(k+1)} \ker g_i.$$

On a alors $\bigcap_{i=1}^{n-(k+1)} \ker g_i \subset \ker g_{n-k}$, et selon la question 2b, $g_{n-k} \in \text{vect}(g_1, \dots, g_{n-(k+1)})$, ce qui est absurde, par liberté des éléments de β .

De plus g_n n'est pas la forme nulle, donc les inclusions :

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset E$$

sont strictes. De là :

$$\dim F_0 < \dim F_1 < \dots < \dim F_{n-1} < n.$$

Cela force $\dim F_k = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et on peut donc conclure.