Feuille d'exercices n^{o} 1. Algèbre linéaire I.
Quelques corrections

Exercice 12
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geqslant 1$ et $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tels que pour tout (i, j) dans $\{1, \ldots, n\}^2$ on ait $u_i \circ u_j = \delta_i^j u_i$.

1. On pose $E_i = \operatorname{Im} u_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Démontrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
2. Qu'en déduire pour le rang de chaque u_i ?

Ici δ_i^j est le symbole de Kronecker (égal à 1 si $i = j$ et égal à 0 sinon).

1. • Montrons que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe. Soient $y_1, \ldots, y_n$ dans $E_1 \rtimes \cdots \times E_n$ tels que :
$$y_1 + \cdots + y_n = 0.$$
Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u_i(x_i)$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) = 0$et ainsi, pour tout $k \in \{, \ldots, n\}$, il vient :
$$u_k\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)\right) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i=1}^{n} u_k \circ u_i(x_i) = 0.$$
On obtient donc $u_k(x_k) = 0$ i.e. $y_k = 0$ pour tout $k \in \{, \ldots, n\}$
La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$ est donc directe.
• On a
$$n \geqslant \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\dim E_i}_{\geqslant 1} \geqslant n.$$
Ainsi $\dim\left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = n$ donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
2. Cela force $\operatorname{rg}(u_i) = 1\ldots$

Exercice 13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

Raisonnons par *analyse/synthèse.*

• *Analyse.* Supposons que $E = \ker f + \operatorname{Im} f$. Soit x dans E. Il existe donc y dans $\ker f$ et z dans $\operatorname{Im} f$ tels que :
$$x = y + z.$$
Ainsi $f(x) = f(y) + f(z) = f(z)$. Comme $z \in \operatorname{Im} f$, il existe x' dans E tel que $z = f(x')$. Il en résulte que :
$$f(x) = f^2(x').$$
Mais $f^2 = f^3 - f$. Ainsi $f(x) = f^3(x') - f(x') = f^2(x) - z$ ce qui amène :
$$(\heartsuit) \begin{cases} z = f^2(x) - f(x) \\ y = x + f(x) - f^2(x) \end{cases}$$

Conclusion partielle. Si $E = \ker f + \mathrm{Im}\, f$, alors la somme est en fait directe, puisque un élément x de E se décompose de manière unique selon $\ker f + \mathrm{Im}\, f$.

• *Synthèse.* Soit x dans E. On définit alors y et z dans E via ($\heartsuit$). On a alors

$$\begin{cases} z = f^2(x) - f(x) = f(f(x) - x) \in \mathrm{Im}\, f \\ f(y) = f(x) + f^2(x) - f^3(x) = 0, \text{ puisque } f^3 = f^2 + f, \text{ donc } y \in \ker f \end{cases}.$$

Conclusion. Tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un élément de $\ker f$ et d'un élément de $\mathrm{Im}\, f$, ce qui assure, avec l'analyse, que : $\boxed{E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f}$. □

Exercice 14 (Lemme de Fitting)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que les suite $\mathrm{Im}\,(u^n)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^n)$ sont monotones et constantes à partir d'un certain rang N (pour l'inclusion). Montrer alors que $E = \mathrm{Ker}\,(u^N) \oplus \mathrm{Im}\,(u^N)$.
2. Démontrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^N)$ et $G = \mathrm{Im}\,(u^N)$ sont stables par u. On note $g = u\,|_F^F$ et $h = u\,|_G^G$. Démontrer que g est nilpotent et h inversible.
3. Déduire des questions précédente que toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$$

où N est une matrice carrée nilpotente et C une matrice carrée inversible.

1. • Soit n dans $\mathbb{N}$. Si $x \in \ker u^n$ alors $u^n(x) = 0$ donc $u(u^n(x)) = 0$ et ainsi $u^{n+1}(x) = 0$. Il en résulte que $x \in \ker u^{n+1}$ ce qui assure que $\ker u^n \subset \ker u^{n+1}$.

   Conclusion partielle. $\boxed{\text{La suite } (\ker u^n) \text{ est croissante pour l'inclusion}}$.

   Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dim \ker u^n$. La suite (d_n) est croissante, majorée par $\dim E$: elle est convergente. Or toute suite dans $\mathbb{Z}$ qui converge est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).

   En effet, soit (x_n) une suite dans $\mathbb{Z}$ telle que $x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Il existe alors N entier tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait :
   $$|x_n - \ell| \leqslant \frac{1}{4}.$$
   Or, l'intervalle $[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}]$ est de longueur $\dfrac{1}{2}$: il ne peut contenir qu'un seul entier. Cela implique que, pour tout $n \geqslant N$ on a : $x_n = x_N$. □

   Ainsi, on dispose de N entier tel que $d_n = d_N$ si $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant N$, on a donc $\ker u^N \subset \ker u^n$ et $\dim u^N = \dim u^n$: il en résulte que les sous-espaces $\ker u^n$ sont tous égaux dès que $n \geqslant N$.

   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \mathrm{Im}\, f^{n+1}$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f^{n+1}(x') = f^n(f(x')) \in \mathrm{Im}\, f^n$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}\, f^n \supset \mathrm{Im}\, f^{n+1}}$.
   Puis **le théorème du rang** affirme que, si $n \geqslant N$:
   $$\dim \mathrm{Im}\, f^n = \dim E - d_n = \dim E - d_N = \dim \mathrm{Im}\, f^N,$$
   et $\mathrm{Im}\, f^N \supset \mathrm{Im}\, f^n$. Ainsi, si $n \geqslant N$ on a $\mathrm{Im}\, f^n = \mathrm{Im}\, f^N$.

   Conclusion. La suite $(\ker u^n)$ est croissante pour l'inclusion, la suite $(\mathrm{Im}\, u^n)$ est décroissante pour l'inclusion et ces deux suites sont stationnaire à partir d'un même rang N.

   • Montrons maintenant que $E = \ker u^N \oplus \mathrm{Im}\, u^N$.
   Si $y \in \ker u^N \cap \mathrm{Im}\, u^N$, alors $u^N(y) = 0$ et il existe x dans E tel que $y = u^N(x)$; ainsi $u^{2N}(x) = 0$ donc $x \in \ker u^{2N} = \ker u^N$ d'où $y = u^N(x) = 0$. On a donc $\ker u^N \cap \mathrm{Im}\, u^N = \{0\}$:

$\boxed{\text{la somme } \ker u^N + \operatorname{Im} u^N \text{ est directe}}$.

Puis le théorème du rang assure que $\dim E = \dim \operatorname{Im} u^N + \dim \ker u^N$. Ainsi on a bien :

$$\boxed{E = \ker u^N \oplus \operatorname{Im} u^N}.$$

2. • Montrons que F et G sont stables par u.
Soit x dans F. On a donc $u^N(x) = 0$ et ainsi $0 = u(u^N(x)) = u^N(u(x)$, donc $u(x) \in F$: F est stable par u.
Soit y dans G. Il existe x dans E tel que $y = u^N(x)$. Ainsi $u(y) = u^N(u(x)) \in \operatorname{Im} u^N = G$: G est stable par u.

• Montrons que g est nilpotent. Soit x dans F. On a $h^N(x) = u^N(x)$, par définition de h. Comme $F = \ker u^N$, on a $h^N(x) = 0$, ce qui assure que $\boxed{h \text{ est nilpotent}}$.

• Montrons que h est inversible. Soit y dans $\ker h$. Comme $y \in \operatorname{Im} u^N$, il existe x dans E tel que $y = u^N(x)$. Ainsi :
$$0 = h(y) = u^{N+1}(x).$$
Il en résulte que $x \in \ker u^{N+1} = \ker u^N$, donc $y = 0$. Ainsi $\ker h = \{0\}$, ce qui signifie que h est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie : $\boxed{h \text{ est inversible}}$.

3. Rappelons le résultat essentiel suivant : *deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

Soit M dans $M_n(\mathbb{K})$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On applique à cet endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ les résultats des deux questions précédentes, d'où, avec les notations précédentes, F et G ainsi que g et h.
Soit β une base de F et γ une base de G. Notons $N = [g]_\beta$ et $C = [h]_\gamma$. Comme g est nilpotent, N est nilpotente. Comme h est inversible, C est inversible. Enfin, comme $E = F \oplus G$, la famille $\mathcal{B} = Rec(\beta, \gamma)$ est une base de E et, toujours selon le cours :
$$[u]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$
Cela assure que M est semblable à $\begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$. □

Exercices supplémentaires

Exercice 15
Soient F et G les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \ \text{ et } \ x + y = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}.$$

Démontrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en en déterminer la dimension ainsi qu'une base. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 16
Deux projecteurs. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q des projecteurs de E

1. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   (i) $p + q$ est un projecteur.
   (ii) $p \circ q + q \circ p = 0$.
   (iii) $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose désormais que l'une de ces conditions est réalisée.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) \subset \ker(q)$ et $\mathrm{Im}\,(q) \subset \ker(p)$.
   b) Montrer que $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
   c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

Exercice 17 (Corps des quaternions)
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on considère l'ensemble $\mathbb{H}$ (comme *Hamilton*)des matrices de la forme $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}$ où $(m,n) \in \mathbb{C}^2$.

1. a) Montrer que $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{m} & -n \\ \overline{n} & m \end{pmatrix} = \left(|m|^2 + |n|^2\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un « corps non commutatif »(pour l'addition et la multiplication induites par celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$). $\mathbb{H}$ est appelé le *corps des quaternions.*
2. a) $\mathbb{H}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
   b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que les quatre matrices

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   constituent une base de $\mathbb{H}$.
   c) Calculer, dans cette base, tous les produits $e_i e_j$.

Exercice 18
On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. I désigne la matrice identité et O la matrice nulle. On pose : $G = \left\{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle

$$(*) \quad (M+I)^{2n} - I = O$$

avec M, matrice inconnue, dans G.

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soient $M = M_{a,b}$ un élément de G tel que $b \neq O$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé a M et Id_E, l'application identité de E.

2. Déterminer une base (e_1') de $E_1 = \ker(u - (a+2b)\mathrm{Id}_E)$.
3. Déterminer une base (e_2', e_3') de $E_2 = \ker(u - (a-b)\mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de E ; on la note $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ecrire P et P^{-1} en précisant les calculs.
7. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
8. Démontrer que : M est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si D est solution de l'équation $(*)$.
9. Déterminer toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans G.

Exercice 19
Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe α, β et γ complexes tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ait une valeur propre double.

Exercice 20
Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1. Démontrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R}) \mid AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$ et déterminer sa dimension.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathrm{I\!R}^3$ canoniquement associé A. On a $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Il existe donc $a \in \mathrm{I\!R}^3$ tel que $f(a) \neq 0$ et on a $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$. Cette dernière inclusion implique que $\ker f$ est de dimension 2 en utilisant le théorème du rang. Puis $f(a) \in \ker f$, puisque $f^2 = 0$. On complète $f(a)$ en une base $(f(a), b)$ de $\ker f$.
   J'affirme alors que la famille $\beta = (f(a), c, a)$ est une base de $\mathrm{I\!R}^3$. En effet, supposons que α, β, γ dans $\mathrm{I\!R}^3$ vérifient :
   $$\alpha f(a) + \beta c + \gamma a = 0.$$
   En appliquant f, il vient : $\gamma f(a) = 0$. Comme $f(a) \neq 0$, on a $\gamma = 0$ et ainsi :
   $$\alpha f(a) + \beta c = 0.$$
   Mais la famille $(f(a), c)$ est libre, donc $\alpha = \beta = 0$.
   Il en résulte que β est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est une base de $\mathrm{I\!R}^3$. Mais la matrice de f dans β est exactement la matrice J : celle-ci est donc semblable à A.

2. • L'application $g : \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R}) \to \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$ définie par $g(M) = AM + MA$ est linaire : son noyau, qui est $\mathcal{F}$, est donc un sous-espace vectoriel de $\mathrm{I\!R}^3$.

   • Selon la question précédente, A et ^{J} sont semblables : il existe $P \in GL_3(\mathrm{I\!R})$ telle que $A = PJP^{-1}$. De plus l'application $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R}) \to \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$ définie par $\varphi(M) = P^{-1}MP$ est un isomorphisme linéaire. En effet, la linéarité est immédiate (à écrire !) et si $\psi : M \mapsto PMP^{-1}$ l'application $\varphi \circ \psi$ est l'identité de $\mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$.

Pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$ on a les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{F} & \Leftrightarrow & AM + MA = 0 \\ & \Leftrightarrow & PJP^{-1}M + MPJP^{-1} = 0 \\ & \Leftrightarrow & JP^{-1}MP + P^{-1}MPJ = 0 \\ & \Leftrightarrow & J\varphi(M) + \varphi(M)J = 0 \end{array}$$

Il en résulte que $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{G} = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R}) \mid NJ + JN = 0\}$. Comme φ est un isomorphisme, $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{G}$.

Prenons alors $N \in \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} N \in \mathcal{G} & \Leftrightarrow & JN + NJ = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} (N)_{3,1} & (N)_{3,2} & (N)_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & (N)_{1,1} \\ 0 & 0 & (N)_{1,2} \\ 0 & 0 & (N)_{1,3} \end{pmatrix} = 0 \end{array}$$

On peut donc conclure que $\mathcal{G}$ est l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathrm{I\!R})$ telles que :

$$\begin{cases} (N)_{3,1} & = 0 \\ (N)_{3,2} & = 0 \\ (N)_{3,3} + (N)_{1,1} & = 0 \\ (N)_{1,2} & = 0 \\ (N)_{1,3} & = 0 \end{cases}.$$

Une matrice de $\mathcal{G}$ est donc décrite par $9 - 5 = 4$ paramètres : $\dim \mathcal{G} = 4$ et $\dim \mathcal{F} = 4$.

Exercice 21

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathrm{I\!R}$. On suppose que u est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \mathrm{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.

1. Comme u est de rang 1, $\dim \mathrm{Im}\, u = 1$.

   • Supposons que $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u = \{0\}$. Vie le théorème du rang on a $\dim \mathrm{Im}\, u + \dim \ker u = n$ donc

   $$E = \mathrm{Im}\, u \oplus \ker u$$

   On prend alors (e_1) base de $\mathrm{Im}\, u$ et $\{e_2, \ldots, e_n\}$ base de $\ker u$. La famille :

   $$\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

   est alors une base de E. Puis $u(e_1) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{vect}(e_1)$ donc il existe λ réel tel que $u(e_1) = \lambda e_1$ et ainsi :

   $$A = [u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   On a alors $A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \lambda A.$

   et ainsi $\boxed{u^2 = \lambda u}$

• Si maintenant $\mathrm{Im}\, u \cap \ker u$ contient un vecteur non nul e_1 alors ce vecteur engendre $\mathrm{Im}\, u$ et on a donc $\mathrm{Im}\, u \subset \ker u$ de sorte que $u^2 = 0$: il existe bien λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.

Autre méthode.
Comme $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension 1, on peut écrire $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{vect}(\varepsilon)$ où ε est un vecteur fixé de E. On a alors $u(\varepsilon) \in \mathrm{Im}\, u$, et ainsi il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $u(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$.
Prenons maintenant x dans E. Comme $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ on dispose de α_x réel tel que $u(x) = \alpha_x \varepsilon$. On a alors :

$$u^2(x) = u(u(x)) = u(\alpha_x \varepsilon) = \alpha_x u(\varepsilon) = \lambda \alpha_x \varepsilon = \lambda u(x)$$

Ceci étant valable pour tout x dans E on a bien $\boxed{u^2 = \lambda u}$.

2. Posons $\boxed{v = u - \mathrm{Id}_E}$. On cherche un polynôme annulateur de v avec terme constant non nul. On a :

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - 2u + \mathrm{Id}_E = \lambda u - 2u + \mathrm{Id}_E = (\lambda - 2)u - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E + (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E \\ &= (\lambda - 2)v + (\lambda - 1)\mathrm{Id}_2 \end{aligned}$$

donc $v^2 - (\lambda - 2)v - (\lambda - 1)\mathrm{Id}_E = 0$. Il en résulte, puisque $\lambda - 1 \neq 0$ que :

$$v \circ \left(\frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E) \right) = \mathrm{Id}_E = \left(\frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E) \right) \circ v$$

Comme $\frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E) \in \mathcal{L}(E)$, on peut donc dire que v est inversible avec :

$$\boxed{v^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1} (v - (\lambda - 2)\mathrm{Id}_E)}.$$