Feuille d'exercices n° 1. Algèbre linéaire I.

Avertissement. Dans toute cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, f dans $\mathcal{L}(E)$. Démontrer que : $\operatorname{Im} f \subset \ker f \Leftrightarrow f \circ f = 0$.

Exercice 2
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.
Montrer que $\ker f \subset \ker (g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}\ (g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

Exercice 3
1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Déterminer l'image et le noyau de f (on précisera une base de ces sous-espaces vectoriels).
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Déterminer l'image et le noyau de f (on précisera une base de ces sous-espaces vectoriels).

Exercice 4
Indice de nilpotence et dimension. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (on dit que f *est nilpotent d'indice* p).
1. Donner un exemple d'une telle application f dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel), et $p = 2$.
2. On revient maintenant au cas général.
   a. Justifier l'existence de $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$ est libre.
   b. En déduire une relation entre p et n.
   c. On suppose dans cette question que $p = n$. Que dire de la famille $\beta = \left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$?
   Donner la matrice $[f]_\beta$ de f dans β.

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe x_0 dans E tel que la famille $(f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ soit une base de E.
1. Justifier de l'existence de $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{k}$ tels que : $f^{n+1}(x_0) = -a_{n-1}f^n(x_0) - \cdots - a_0 f(x_0)$.
2. On considère l'endomorphisme h de E défini par : $h = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_0 \mathrm{Id}_E$. Démontrer que h est nul.

Exercice 6
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On écrit $A = [a_{ij}]$ et on considère l'application : $f = \begin{pmatrix} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{pmatrix}$.
Soit $\beta = (E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21})$ « la base canonique » de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $[f]_\beta$.

Exercice 7 (Théorème de Schur)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x dans E on ait $(x, f(x))$ liée.
Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 8
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$. Démontrer que $f \circ g$ est inversible si et seulement si f et g sont inversibles.

Exercice 9
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que u vérifie $u^3 = 0$. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est dans $GL(E)$. Généraliser au cas où $u^n = 0$ pour $n \geqslant 1$ entier.
2. On suppose que u vérifie $u^3 + 2u^2 + 3\mathrm{Id}_E = 0$. Démontrer que $u \in GL(E)$ et préciser u^{-1}.

Exercice 10
Vecteurs invariants par un endomorphisme. Soient $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$.

1. Prouver que l'ensemble $\mathbf{P} = \{x \in \mathbf{E}, f(x) = x\}$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ invariants par f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$.
2. Montrer que $\mathbf{P}$ et $\ker f$ sont *en somme directe*.

Exercice 11

1. *Supplémentaires dans* $\mathbb{R}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}^n$. Soient $D = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}\{e\}$ où $e = (1, 1, ..., 1)$ et $H = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$. Montrer que D et H sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (pour les lois usuelles). Soient $a \in \mathbb{R}$, $F_0 = \{f \in E, f(a) = 0\}$, G_0 l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
   Établir que F_0 et G_0 sont deux sous-espaces vectoriels de E et qu'ils sont supplémentaires dans E.

Exercice 12
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geqslant 1$ et $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tels que pour tout (i, j) dans $\{1, \ldots, n\}^2$ on ait $u_i \circ u_j = \delta_i^j u_i$.

1. On pose $E_i = \mathrm{Im}\, u_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Démontrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
2. Qu'en déduire pour le rang de chaque u_i ?

Exercice 13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 14 (Lemme de Fitting)
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que les suite $\mathrm{Im}\,(u^n)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^n)$ sont monotones et constantes à partir d'un certain rang N (pour l'inclusion). Montrer alors que $E = \mathrm{Ker}\,(u^N) \oplus \mathrm{Im}\,(u^N)$.
2. Démontrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^N)$ et $G = \mathrm{Im}\,(u^N)$ sont stables par u. On note $g = u\,|_F^F$ et $h = u\,|_G^G$. Démontrer que g est nilpotent et h inversible.
3. Déduire des questions précédente que toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{N} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{pmatrix}$$

   où N est une matrice carrée nilpotente et C une matrice carrée inversible.

Exercices supplémentaires

Exercice 15
Soient F et G les parties de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}.$$

Démontrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en en déterminer la dimension ainsi qu'une base. Déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 16
Deux projecteurs. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q des projecteurs de E

1. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   (i) $p + q$ est un projecteur.
   (ii) $p \circ q + q \circ p = 0$.
   (iii) $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose désormais que l'une de ces conditions est réalisée.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) \subset \ker(q)$ et $\mathrm{Im}\,(q) \subset \ker(p)$.
   b) Montrer que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
   c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(p + q) = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

Exercice 17 (Corps des quaternions)
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on considère l'ensemble $\mathbb{H}$ (comme *Hamilton*)des matrices de la forme $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix}$ où $(m, n) \in \mathbb{C}^2$.

1. a) Montrer que $\begin{pmatrix} m & n \\ -\overline{n} & \overline{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{m} & -n \\ \overline{n} & m \end{pmatrix} = \left(|m|^2 + |n|^2\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un « corps non commutatif »(pour l'addition et la multiplication induites par celles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$). $\mathbb{H}$ est appelé le *corps des quaternions.*
2. a) $\mathbb{H}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
   b) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que les quatre matrices

   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   constituent une base de $\mathbb{H}$.
   c) Calculer, dans cette base, tous les produits $e_i e_j$.

Exercice 18
On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. I désigne la matrice identité et O la matrice nulle. On pose : $G = \left\{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle

$$(*) \quad (M+I)^{2n} - I = O$$

avec M, matrice inconnue, dans G.

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soient $M = M_{a,b}$ un élément de G tel que $b \neq O$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé a M et Id_E, l'application identité de E.

2. Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \ker(u - (a+2b)\mathrm{Id}_E)$.
3. Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \ker(u - (a-b)\mathrm{Id}_E)$.
4. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ecrire P et P^{-1} en précisant les calculs.
7. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
8. Démontrer que : M est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si D est solution de l'équation $(*)$.
9. Déterminer toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans G.

Exercice 19
Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe α, β et γ complexes tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ait une valeur propre double.

Exercice 20
Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1. Démontrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 21
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que u est de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un nombre λ réel tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Montrer que si $\lambda \neq 1$, $u - \mathrm{Id}_E$ est inversible et déterminer son inverse.