Pratique de la trigonalisation

Commençons par une remarque. Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ à trigonaliser « *a toujours* 0 *pour valeur propre triple* ». Expliquons cette phrase.

— Si A admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

— Si A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, de multiplicité géométrique 1 (sinon elle est diagonalisable) on trouve X_1 et X_2 deux vecteurs propres colonnes respectivement associés à λ_1 et λ_2 et on choisit $X_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, simple, tel que (X_1, X_2, X_3) soit libre. On a alors :

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix},$$

la dernière colonne de T se trouvant en exprimant AX_3 dans la base (X_1, X_2, X_3), sachant que l'on aura toujours $AX_3 = *X_1 + *X_2 + \lambda X_3$ où λ est la valeur propre double de A.

Voir dans ce cas l'exercice 2.

— Si maintenant A admet une valeur propre triple λ, alors on trigonalise $A - \lambda I$.

Exercice 1
Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On trouve sans peine $\chi_A = X^3$. Ainsi $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$ et A n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle). Mais χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice A est de rang 2 et ainsi $\dim \ker A = 1$. Comme la première colonne et la troisième colonne de A sont égales, $\ker A = \mathrm{vect}\,(X_1)$ où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme le rang de A est 2, on cherche alors $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_2 = X_1$, ce qui conduit au système :

$$(S) \begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

On choisit alors $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ -1 & 1 & * \end{pmatrix}$.

On cherche enfin $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que (X_1, X_2, X_3) libre et $AX_3 = X_2$. Cela amène le système :

$$(S) \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

et on prend $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. On a $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Si le rang de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est 1 avec une valeur propre triple , qui doit être 0, on prend (X_1, X_2) base de $\ker A$ et pour compléter la matrice P, on cherche X_3 tel que $AX_3 = X_1$.

Exercice 2
Trigonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On trouve rapidement $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$, qui est scindé sur $\mathbb{R}$, donc B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme 1 est valeur propre simple, $\ker(B-I)$ est une droite qui est engendrée par $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (pour le lecteur).

Puis $B-2I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -5 & -2 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang $\leqslant 2$ car 2 est valeur propre et en fait de rang exactement 2, puisque les colonnes 1 et 2 de $B-2I$ ne sont pas proportionnelles. Ainsi $\ker(B-2I)$ est de dimension 1, engendré par $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$ où...).

On peut noter que B est non diagonalisable (somme des dimensions des sous-espaces propres...).

D'après ce qui précède, $B = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & -2 & * \\ -2 & 1 & * \end{pmatrix}$.

On complète alors la famille libre (X_1, X_2) en une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en rajoutant un vecteur indépendant des deux deux autres, par exemple $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a de suite $BX_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = X_2 + 2X_3$, de sorte que :

$$B = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$