Devoir supplémentaire n° 2. Une correction

I - Premiers résultats

1. Soit un u endomorphisme nilpotent d'indice 1, alors $u = u^1 = 0$.

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

2. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geqslant 2$. p est le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0$.
Donc $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ (sinon cela contredirait la minimalité de l'entier p).
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3. • Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0. \quad (*)$$

— En appliquant l'endomorphisme u^{p-1} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
L'équation $(*)$ devient : $\lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
— En appliquant l'endomorphisme u^{p-2} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
L'équation $(*)$ devient : $\lambda_2 u^2(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
— ...
— En itérant le procédé, on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-2} = 0$.
L'équation $(*)$ devient : $\lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{p-1} = 0$.
— Finalement, $\forall i \in [|0, p-1|], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (\S, \sqcap(\S), \ldots \sqcap^{\sqrt{-\infty}}(\S))$ est libre.
Ainsi la famille $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.

• L'espace vectoriel E est de dimension 2, donc toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à 2.
La famille libre $(u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est de cardinal p, d'où $p \leqslant 2$. Or $p \geqslant 2$ donc $p = 2$.

4. Comme u est nilpotent d'indice 2 d'après la question précédente, $u \neq 0$ et $u^2 = u \circ u = 0$, on sait d'après le cours qu'alors $\mathrm{Im}\,(u) \subset \ker(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\ker(u))$. Or, d'après la formule du rang appliquée à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, il vient $2 = \dim(\mathrm{Im}\,(u)) + \dim(\ker(u))$. Puisque $\mathrm{rg}(u) > 0$ car $u \neq 0$, on ne peut avoir que $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim(\ker(u)) = 1$. Par inclusion et égalité des dimensions, on peut conclure que $\mathrm{Im}\,(u) = \ker(u)$.

5. D'après les questions 2 et 3, il existe un vecteur x de E tel que $(x, u(x))$ soit libre dans E de dimension 2, le cours nous apprend alors que $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est une base de E.
En posant $y = u(x)$, on a $u(x) = y$ et $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.$$

6. ($\Rightarrow$) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Comme A, u est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. On traite les deux cas des questions précédentes avec $E = \mathbb{C}^2$.
• Si $p = 1$, d'après la question 1, $u = 0$ donc $A = 0$ et on a bien $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.
• Si $p \geqslant 2$, on a vu en question 5 qu'il existait une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que $[u]_{\mathcal{B}} = J_2$. Comme A et J_2 représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables (plus précisément si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a $A = PJ_2P^{-1}$) donc elles ont même trace et même déterminant. Comme $\mathrm{tr}(J_2) = \det(J_2) = 0$, on a encore $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.

($\Leftarrow$) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$. On sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $A^2 = 0$ car χ_A annule A : A est bien nilpotente d'indice $p \leqslant 2$.
Par conséquent, on conclut par double implication que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$).

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

7. À nouveau, comme u est nilpotent d'indice 2, on a $u^2 = u \circ u = 0$ donc

$$\text{Im}\,(u) \subset \ker(u).$$

Il vient donc $\text{rg}(u) \leqslant \dim(\ker(u))$. On ajoute $\text{rg}(u)$ de part et d'autre de cette inégalité pour avoir, avec la formule du rang, l'inégalité

$$2\,\text{rg}(u) = \boxed{2r \leqslant n} = \dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\ker(u)).$$

8. • Comme $\text{Im}\,(u)$ est de dimension $r = \text{rg}(u)$, il existe une base $(w_1, \ldots, w_r)$ de $\text{Im}\,(u)$. Par définition de l'image, il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ tels que $u(e_1) = w_1, \ldots, u(e_r) = w_r$.
• que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ est une base de E.

Soit $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots, \lambda_r, \mu_r) \in \mathbb{C}^{2r}$ telle que

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \lambda_2 e_2 + \mu_2 u(e_2) + \cdots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) = 0 \ (*).$$

On compose $(*)$ par u donc, comme $u^2 = 0$, il vient $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_r w_r = 0$. Mais on sait que $(w_1, \ldots, w_r)$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Il ne reste donc plus dans $(*)$ que $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_r w_r = 0$ qui amène encore la conclusion $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r = 0$ car $(w_1, \ldots, w_r)$ est libre. On vient de prouver que $\mathcal{B}$ est libre.
Or $\dim(E) = n = 2r = \text{rg}(u) + \dim(\ker(u))$ par la formule du rang donc $\mathcal{B}$ admet autant de vecteurs que la dimension de E. On peut conclure que

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$$

9. Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant r$, $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$ donc, par construction de $\mathcal{B}$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est $[u]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(J_2, \ldots, J_2) \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C})$.

10. On raisonne comme en question 8. Comme $\text{rg}(u) = r$, il existe une base $(w_1, \ldots, w_r)$ de $\text{Im}\,(u)$, puis des vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ tels que $u(e_1) = w_1, \ldots, u(e_r) = w_r$. Comme $\text{Im}\,(u) \subset \ker(u)$, $(w_1, \ldots, w_r)$ est une famille libre de vecteurs de $\ker(u)$. D'après le théorème de la base incomplète, comme $\dim(\ker(u)) = \dim(E) - \text{rg}(u) = n - r \geqslant r$ par la formule du rang, on peut trouver des vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-2r}$ dans $\ker(u)$ pour compléter $(w_1, \ldots, w_r)$ en une base $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_{n-2r})$ de $\ker(u)$. Vérifions que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, \ldots, v_{n-2r})$ est une base de E. Soit $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots, \lambda_r, \mu_r, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2r}) \in \mathbb{C}^{2r}$ telle que

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \lambda_2 e_2 + \mu_2 u(e_2) + \ldots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) + \eta_1 v_1 + \ldots + \eta_{n-2r} v_{n-2r} = 0 \ (*).$$

On compose $(*)$ par u pour obtenir $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_r w_r = 0$. Or $(w_1, \ldots, w_r)$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Il ne reste donc plus dans $(*)$ que $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_r w_r + \eta_1 v_1 + \ldots + \eta_{n-2r} v_{n-2r} = 0$ qui amène encore la conclusion $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = \eta_1 = \ldots = \eta_{n-2r} = 0$ car $\mathcal{B}'$ est libre (c'est une base de $\ker(u)$). Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre.
Comme $\mathcal{B}$ admet autant de vecteurs que la dimension de E. On peut conclure que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, \ldots$ est une base de E.

11. Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant r$, on a $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$. Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant n - 2r$, on a $u(v_k) = 0$ car $v_k \in \ker(u)$ donc, par construction de $\mathcal{B}$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut $[u]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(J_2, \ldots, J_2, 0_{n-2r}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.C - Valeurs propres d'une matrice nilpotente

12. Supposons A nilpotente d'indice p. Soit $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Il existe alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$ et on obtient très vite $A^P X = \lambda^p X$ donc $\lambda^p X = 0$ d'où $\lambda^p = 0$ et ainsi $\lambda = 0$, puisque X est non nul. De plus 0 est bien une valeur propre de A puisque A est non inversible.

Conclusion. 0 est l'unique valeur propre de A.

13. Supposons que A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit diagonalisable et nilpotente. Comme $\text{Spec}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice nulle, donc $A = 0_n$.

14. • Si $\chi_A = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $A^n = 0$ et A est bien nilpotente.

    • Supposons que A est nilpotente. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ (D'Alembert-Gauss), on peut écrire χ_A comme un produit de facteurs du premier degré : $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$. Mézalors, chaque α_i est valeur propre de A donc égal à 0. Il en résulte que $\chi_A = X^n$.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont 0 est l'unique valeur propre. On a alors $\chi_A = X^n$, donc A est nilpotente.

16. • Soit A une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle. Alors $\chi_A = X^n$ donc A est nilpotente selon la question 14.

    • Soit A une matrice nilpotente. On a alors $\chi_A = X^n$ qui est scindé. Ainsi A est trigonalisable, donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, donc à diagonale nulle.

17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et $P = X^pQ \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.
    Alors, comme $P(A) = A^pQ(A)$ et que $A^p = 0$, on a bien $P(A) = 0$.

18. Comme P est un polynôme annulateur de A, on sait d'après le cours que toute valeur propre de A est racine de P. Or 0 est la seule valeur propre de A nilpotente d'après la question 12.

19. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire $Q = \prod_{k=1}^{q}(X - \lambda_k)^{m_k}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont les différentes racines de Q et $m_1, \ldots, m_q$ leurs multiplicités respectives. Comme $Q(0) \neq 0$, aucune de ces racines n'est nulle. Par conséquent, $Q(A) = \prod_{k=1}^{q}(A - \lambda_k I_n)^{m_k}$ d'après les relations sur les polynômes de matrice.
    Or, pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant q$, le complexe λ_k n'est pas valeur propre de A puisque $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$ d'après la question 12, ainsi la matrice $A - \lambda_k I_n$ est inversible. En tant que produit de puissances de matrices inversibles (autrement dit $GL_n(\mathbb{C})$ est stable par produit, c'est même un groupe pour la loi $\times$),

    $$\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$$

    Comme $P(A) = A^mQ(A) = 0$, en multipliant à droite par $Q(A)^{-1}$, on obtient $A^m = 0$. Mais par définition de l'indice de nilpotence de A, $A \neq 0, A^2 \neq 0, \ldots, A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$, ce qui justifie que $m \geqslant p$. Ainsi,

    $$\boxed{P = X^mQ = X^p(X^{m-p}Q) \text{ est bien un multiple de } X^p.}$$

    Réciproquement, même si ce n'est pas demandé, si $P = X^pQ$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) = A^pQ(A) = 0 \times Q(A) = 0$ donc P annule A. Par double implication, on a montré l'équivalence suivante,

    $$\boxed{\text{si } A \text{ est nilpotente d'indice } p \text{ et } P \in \mathbb{C}[X],\ P(A) = 0 \iff X^p \text{ divise } P.}$$

    Autrement dit, même si la notion est hors programme, le polynôme minimal de A nilpotente d'indice p est X^p.

I.D - Racines carrées de matrices nilpotentes

I.D.1)

20. Comme les deux dernières colonnes de A sont respectivement 3 fois et -7 fois la première qui est non nulle, on a $\mathrm{rg}(A) = 1$. Il vient donc

    $$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0.}$$

    D'après le cours, on sait que l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A est supérieur ou égal à $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A))$ or $\dim(\ker(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2$ par la formule du rang. Ainsi, $(X - 0)^2 = X^2$ divise χ_A. Par conséquent, comme χ_A est de degré 3 et unitaire, on a $\chi_A = X^3 + aX^2$. De plus, le cours nous apprend que $a = -\mathrm{tr}(A) = 0$ car $\chi_A = X^3 - \mathrm{tr}(A)X^2 + \ldots - \det(A)$. Finalement,

    $$\boxed{\chi_A = X^3.}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$ donc A est nilpotente. Un calcul élémentaire montre que $A^2 = 0$. On pouvait aussi dire que $A = XY^T$ avec $X = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}1\\3\\-7\end{pmatrix}$ donc $A^2 = XY^TXY^T = (Y|X)XY^T = (X|Y)A$ car $(Y|X) = Y^TX$. Comme $(X|Y) = 1\times 1 + 2\times 3 + 1\times(-7) = 0$, on à nouveau $A^2 = 0$, d'où

$$\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice 2.}}$$

21. On cherche à montrer que A est semblable à $\text{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = T$ ce qui revient, par la formule de changement de base, à trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $[u]_{\mathcal{B}} = T$.
Il s'agit donc de trouver v_1, v_2, v_3 linéairement indépendants tels que $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$.
Procédons par ordre :
• on cherche v_2 tel que $v_2 = u(v_1) \neq 0$ or, comme $\text{rg}(u) = 1$ et $\text{Im}\,(u) = \text{vect}(X)$, il suffit de prendre $v_2 = X = (1, 2, 1)$.
• on cherche v_1 tel que $u(v_1) = v_2$ ce qui nous conduit à prendre $v_1 = e_1 = (1, 0, 0)$ d'après la matrice A.
• on cherche v_3 tel que $u(v_3)$ donc $v_3 \in \ker(u)$ qui est le plan d'équation $x + 3y - 7z = 0$ d'après la matrice A, il suffit de prendre n'importe quel vecteur de ce plan qui n'est pas colinéaire à v_2, par exemple $v_3 = (3, -1, 0)$.
Réciproquement, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$ car en posant $P = \begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ qui est la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible.
Par construction, $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$ donc $[u]_{\mathcal{B}} = T$. Comme A est la matrice de u dans la base canonique, A et T représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes donc elles sont semblables. Plus précisément, la matrice P définie ci-dessus étant la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \text{diag}(J_2, J_1)\,; \text{ de plus } P^{-1} = \begin{pmatrix}1&3&-7\\0&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix}}$$

car on a clairement $e_1 = v_1$, $e_2 = 3v_1 - v_3$ et $e_3 = v_2 - 2e_2 - e_1 = v_2 + 2v_3 - 6v_1 - v_1 = -7v_1 + v_2 + 2v_3$.

22. Si $R^2 = A$, comme $A^2 = 0$, il vient $R^4 = (R^2)^2 = A^2 = 0$ donc R est nilpotente. Puisque $R^2 = A$, on a $\rho^2 = u$. Ainsi, $\rho \circ u = \rho^3 = u \circ \rho$ donc ρ et u commutent. On sait d'après le cours qu'alors

$$\boxed{\text{Im}\,(u) et \ker(u) \text{ sont stables par } \rho \text{ et } \rho \text{ est nilpotent car } R \text{ l'est.}}$$

23. Soit toujours $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A$, posons $R' = P^{-1}RP$ comme proposé par l'énoncé avec la matrice P de la question 21. Par la formule de changement de base, R' est la matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}$.
- Comme $\text{Im}\,(u)$ est stable par ρ, il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(v_2) = dv_2$.
- Comme $\ker(u)$ est stable par ρ, il existe $(e, f) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\rho(v_3) = ev_2 + fv_3$.
- Il existe aussi $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\rho(v_1) = av_1 + bv_2 + cv_3$.
Ainsi, $R' = \begin{pmatrix}a&0&0\\b&d&e\\c&0&f\end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, en développant le déterminant $\chi_{R'}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - R')$ par rapport à la première ligne, on obtient directement $\chi_{R'}(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - d)(\lambda - f)$ donc $\chi_{R'} = (X - a)(X - d)(X - f)$. Mais comme R' est nilpotente, car ρ l'est, d'après la question 22, on a $\chi_R = X^3$ d'après la question 14. Par conséquent : $a = d = f = 0$ d'où $R' = \begin{pmatrix}0&0&0\\b&0&e\\c&0&0\end{pmatrix}$. On calcule alors $R'^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\ce&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Comme $R^2 = A$ équivaut à $R'^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = T$, la condition $R^2 = A$ se traduit par $ce = 1$. On obtient donc $R' = \begin{pmatrix}0&0&0\\b&0&1/c\\c&0&0\end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$.
Réciproquement, si R' est de la forme précédente, alors $R'^2 = T$ (par calcul) donc $R^2 = PR'^2P^{-1} = PTP^{-1} = A$.
Ainsi, par double implication, pour $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a l'équivalence :

$$\boxed{R^2 = A \iff R' = \begin{pmatrix}0&0&0\\b&0&1/c\\c&0&0\end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$$

Comme $R = PR'P^{-1}$, on a la nouvelle équivalence grâce à la question 21, toujours pour $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\boxed{R^2 = A \iff R = \begin{pmatrix} b+3c & 3b+9c-(1/c) & (2/c)-7b-21c \\ 2b-c & 6b-3c-(2/c) & (4/c)-14b+7c \\ b & 3b-(1/c) & (2/c)-7b \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$$

I.D.2)

On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

24. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3$, alors $\boxed{R^4 = (R^2)^2 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{3,1}}$ (matrice élémentaire) donc $\boxed{R^6 = R^4R^2 = J_3E_{3,1} = 0.}$ Comme R est nilpotente, $\chi_R = X^3$ d'après la question 14, donc $R^3 = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On en déduit que $R^4 = R^3R = 0$ ce qui est incompatible avec $R^4 = E_{3,1}$.

$$\boxed{\text{Il n'existe donc aucune solution de l'équation } R^2 = J_3 \text{ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$$

I.D.2)

25. On raisonne par l'absurde en considérant une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = V$. Comme $V^p = 0$, on a $R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$ donc R est nilpotente. À nouveau, d'après la question 14, $\chi_R = X^n$ donc $R^n = 0$ (toujours Cayley-Hamilton). Or, par hypothèse, on a $2p-1 > n$ donc $2p-2 \geqslant n$. Mais V est nilpotente d'indice p donc $V^{p-1} = (R^2)^{p-1} = R^{2p-2} \neq 0$. Ceci est impossible car $2p-2-n \geqslant 0$ et $R^{2p-2} = R^n R^{2p-2-n} = 0 \times R^{2p-2-n} = 0$.

$$\boxed{\text{Si } V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente d'indice } p \text{ tel que } 2p-1 > n, \ V \text{ n'a pas de racine carrée dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

26. Soit $n \geqslant 3$, grâce à la question 23, on pose $V = \text{diag}(J_2, J_1, \ldots, J_1) = \text{diag}(T, 0_{n-3}) = E_{2,1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les calculs qui précèdent montrent que si on pose $R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (en prenant $b = 0$ et $c = 1$ dans la question 23 par exemple) et $R = \text{diag}(R_3, 0_{n-3})$, on a $R^2 = \text{diag}(R_3^2, 0_{n-3}) = \text{diag}(T, 0_{n-3}) = V$. De plus, V est nilpotente d'ordre $p = 2 \geqslant 2$ car $V \neq 0$ et $V^2 = \text{diag}(T^2, 0_{n-3}) = 0$. Ainsi, si $n \geqslant 3$,

$$\boxed{V = E_{2,1} \text{ est nilpotente d'indice } p = 2 \text{ et elle admet pour racine carrée } R = E_{2,3} + E_{3,1}.}$$

On pouvait le vérifier directement en se rappelant que les matrices élémentaires vérifient la relation $\boxed{E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}}$

ce qui justifie que $E_{2,1}^2 = 0$ et que $(E_{2,3}+E_{3,1})^2 = E_{2,3}E_{2,3} + E_{2,3}E_{3,1} + E_{3,1}E_{2,3} + E_{3,1}E_{3,1} = 0 + E_{2,1} + 0 + 0 = E_{2,1}$.

II - Deuxième partie

II.A - Réduction des matrices nilpotentes

27. Soit $y \in \text{Im}\,(u)$, par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Ainsi, $u(y) = u(u(x)) \in \text{Im}\,(u)$ d'où

$$\boxed{\text{le sous-espace Im}\,(u) \text{ est stable par } u.}$$

Cette stabilité de $\text{Im}\,(u)$ par u nous permet d'induire l'endomorphisme u sur $\text{Im}\,(u)$, et on note $v = u|_{\text{Im}\,(u)}$ cet endomorphisme induit par u sur $\text{Im}\,(u)$, c'est-à-dire $v : \text{Im}\,(u) \to \text{Im}\,(u)$ défini par $v(y) = u(y)$ si $y \in \text{Im}\,(u)$. Comme $u^p = 0$, pour $y \in \text{Im}\,(u)$, toujours avec $x \in E$ tel que $y = u(x)$, on a $v^{p-1}(y) = u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$ donc

$$\boxed{v^{p-1} = 0 \text{ et } v \text{ est nilpotent d'indice } q \leqslant p-1 \text{ (par minimalité de } q).}$$

Comme $u^{p-1} \neq 0$, il existe par définition un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. En posant $y = u(x) \in \text{Im}\,(u)$, il vient $v^{p-2}(y) = u^{p-2}(u(x)) = u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $v^{p-2} \neq 0$. On en déduit que $q \geqslant p-1$. Au final,

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } v \text{ induit par } u \text{ sur Im}\,(u) \text{ est nilpotent d'indice } p-1.}$$

28. $C_u(x)$ est, par construction, un sous-espace vectoriel de E en tant que sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Soit $y \in C_u(x)$, par définition, il existe un entier m et des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ tels que $y = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k u^k(x)$. Ainsi, par linéarité de u, $u(y) = u\left(\sum_{k=0}^{m} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k u^{k+1}(x) \in C_u(x)$ ce qui prouve que

$$\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$$

Posons $A = \{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0\}$. Comme $p \in A$ car $u^p = 0$, A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $0 \notin A$ car $u^0 = \mathrm{Id}_E$. La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ permet de conclure que A admet un minimum, noté $s(x) \geqslant 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il existe un entier } s(x) \geqslant 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x) = 0 \text{ et } u^{s(x)-1}(x) \neq 0.}$$

29. D'après la question précédente et la définition de $s(x)$, pour tout entier $k \geqslant s(x)$, on a $u^k(x) = 0$. La famille $\big(u^k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre donc le même sous-espace de E que la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\big)$. On obtient $C_u(x) = \mathrm{vect}\big(u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\big) = \mathrm{vect}\big(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\big)$ et $\mathcal{B}_x = \big(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\big)$ est déjà une famille génératrice de $C_u(x)$. Comme en question 3, on peut montrer que celle-ci est aussi libre. Recommençons :
Soit $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant s(x)-1} \in \mathbb{C}^{s(x)}$ telle que $\sum_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ $(*)$. Si on avait $(\lambda_0, \dots, \lambda_{s(x)-1}) \neq (0, \dots, 0)$, on pourrait définir l'entier $i_x = \min(\{0 \leqslant k \leqslant s(x) - 1 \mid \lambda_k \neq 0\})$ de sorte que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{i_x-1} = 0$ et $\lambda_{i_x} \neq 0$. En composant la relation $(*)$ par $u^{s(x)-1-i_x}$ (on le peut car $s(x) - 1 - i_x \geqslant 0$), on aurait donc, par linéarité de u, $\sum_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^{s(x)-1-i_x+k}(x) = u(0) = 0$, d'où $\sum_{k=i_x}^{s(x)-1} \lambda_k u^{s(x)-1-i_x+k}(x) = 0$. Comme $u^{s(x)}(x) = 0$, il ne reste dans cette somme que $\lambda_{i_x} u^{s(x)-1}(x) = 0$. C'est impossible puisque $\lambda_{i_x} \neq 0$ et $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde : $(\lambda_0, \dots, \lambda_{s(x)-1}) = (0, \dots, 0)$. Ainsi, $\mathcal{B}_x$ est aussi libre. Finalement, comme la matrice dans cette base de l'endomorphisme $u|_{C_u(x)}$ est facile à obtenir puisque $u(u^{s(x)-1}(x)) = u^{s(x)}(x) = 0$,

$$\boxed{\mathcal{B}_x = \big(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\big) \text{ est une base de } C_u(x) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u|_{C_u(x)}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_{s(x)}.}$$

30. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$\boxed{H_p = \text{" si } u \in \mathcal{L}(E) \text{ nilpotente d'indice } p \text{ et } E \text{ } \mathbb{C}\text{-ev de dimension finie, } \exists t \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_1, \dots, x_t) \in E^t,\ E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).}$$

• Initialisation : pour $p = 1$, si u est un endomorphisme nilpotent d'indice $p = 1$ d'un $\mathbb{C}$-espace E, alors u est l'endomorphisme nul de E. En posant $t = \dim(E)$, on choisit une base quelconque $(x_1, \dots, x_t)$ de E et, comme $C_u(x_i) = \mathrm{vect}(x_i)$ puisque $s(x_i) = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$, on a bien $E = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_t) = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{vect}(x_i) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.
• Hérédité : soit $p \geqslant 1$, supposons H_p vérifiée et montrons H_{p+1}. Prenons donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p+1$. Comme $p+1 \geqslant 2$, la question 27 nous apprend que l'endomorphisme $v = u|_{\mathrm{Im}\,(u)}$ est nilpotent d'indice p dans le $\mathbb{C}$-espace $\mathrm{Im}\,(u)$. L'hypothèse H_p s'applique à v et fournit l'existence d'un entier $t \geqslant 1$ et de t vecteurs $y_1, \dots, y_t$ de $\mathrm{Im}\,(u)$ tels que

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i).}$$

Si $1 \leqslant i \leqslant t$, il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$. Comme $v^k(y_i) = v^k(u(x_i)) = u^{k+1}(x_i)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $s(x_i) = s(y_i) + 1$ (avec les notations de la question 28). Ainsi, $C_v(y_i) = \text{vect}\big(y_i, \dots, v^{s(y_i)-1}(y_i)\big) = \text{vect}\big(u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big)$ donc

$$C_u(x_i) = \text{vect}\big(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big) = \text{vect}(x_i) + \text{vect}\big(u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big) = \text{vect}(x_i) + C_v(y_i).$$

Or $x_i \notin \text{vect}\big(u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big)$ puisque la famille $\mathcal{B}_{x_i} = \big(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big)$ est une base de $C_u(x_i)$ d'après la question 29, on en déduit donc que $C_u(x_i) = \text{vect}(x_i) \oplus C_v(y_i)$ d'où

$$\boxed{\forall i \in [\![1, t]\!],\ \dim\big(C_u(x_i)\big) = \dim\big(C_v(y_i)\big) + 1.}$$

Vérifions que $\sum_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ est une somme directe, ce qui revient, en posant $\mathcal{F} = (\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_t})$ la famille formée en concaténant les bases des sous-espaces $C_u(x_i)$, à montrer que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t \\ 0 \leqslant j \leqslant s(x_i)-1}} \in \mathbb{C}^{s(x_1)+\dots+s(x_t)}$ une famille de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{s(x_i)-1} \lambda_{i,j} u^j(x_i) = 0 \ (1).$$

On applique u à cette relation et on obtient, puisque $u^{s(x_i)}(x_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$ d'après la question 28 :

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{s(x_i)-2} \lambda_{i,j} u^{j+1}(x_i) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\ell=1}^{s(x_i)-1} \lambda_{i,\ell-1} u^{\ell}(x_i) = 0.$$

Puisque $\text{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i) = \bigoplus_{i=1}^{t} \text{vect}\big(u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big)$ par hypothèse, la relation ci-dessus n'est possible que si tous les scalaires de cette combinaison linéaire sont nuls. Il ne reste donc dans la relation (1) que

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_{i,s(x_i)-1} u^{s(x_i)-1}(x_i) = 0.$$

Or, si $1 \leqslant i \leqslant t$, $u^{s(x_i)-1}(x_i)$ appartient à $C_v(y_i)$ et, encore une fois, on a la somme directe $\text{Im}\,(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i)$, ce qui permet de conclure que $\lambda_{1,s(x_1)-1} = \dots = \lambda_{t,s(x_t)-1} = 0$. Au final,

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ est bien libre et } \sum_{i=1}^{t} C_u(x_i) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).}$$

À nouveau, si $1 \leqslant i \leqslant t$, $u^{s(x_i)}(x_i) = 0$ donc $u^{s(x_i)-1}(x_i) \in \ker(u)$. La famille $\mathcal{G} = \big(u^{s(x_i)-1}(x_i), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t)\big)$ est donc une famille libre (en tant que sous-famille de la famille libre $\mathcal{F}$) formée de vecteurs de $\ker(u)$.
Or, en posant $n = \dim(E)$ et $r = \text{rg}(u)$, la formule du rang appliquée à u prouve que

$$\dim\big(\ker(u)\big) = \dim(E) - \text{rg}(u) = n - r.$$

Le théorème de la base incomplète, puisque $\mathcal{G}$ est de cardinal t, justifie qu'on peut trouver $n - r - t$ vecteurs $e_1, \dots, e_{n-r-t}$ dans $\ker(u)$, tels que $\mathcal{B}' = \big(u^{s(x_i)-1}(x_i), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t), e_1, \dots, e_{n-r-t}\big)$ est une base de $\ker(u)$.
Posons $F = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ qui admet pour base la famille $\mathcal{F}$ et $G = \text{vect}(e_1, \dots, e_{n-r-t})$ de base $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{n-r-t})$ (sous-famille de la famille libre $\mathcal{B}'$). Vérifions que F et G sont en somme directe. Considérons donc des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t \\ 0 \leqslant j \leqslant s(x_i)-1}} \in \mathbb{C}^{s(x_1)+\dots+s(x_t)}$ et $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-r-t} \in \mathbb{C}^{n-r-t}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{s(x_i)-1} \lambda_{i,j} u^j(x_i) + \sum_{k=1}^{n-r-t} e_k = 0 \ (2).$$

Comme avant, on applique u à cette relation pour avoir $\sum_{i=1}^{t} \sum_{\ell=1}^{s(x_i)-1} \lambda_{i,\ell-1} u^{\ell}(x_i) = 0$. Les scalaires de cette combinaison linéaire sont nuls car $\text{Im}\,(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i)$. Il ne reste donc dans (2) que $\sum_{i=1}^{t} \lambda_{i,s(x_i)-1} u^{s(x_i)-1}(x_i) +$

$\sum_{k=1}^{n-r-t} e_k = 0$ et, là encore, la liberté de la famille $\mathcal{B}'$ montre que tous ces scalaires sont nuls. En conclusion, F et G sont en somme directe. De plus, comme $F = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ et $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_{n-r-t})$,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) = \Big(\sum_{i=1}^{t} \dim\big(C_u(x_i)\big)\Big) + n - r - t,$$

d'où, comme $\dim\big(C_u(x_i)\big) = \dim\big(C_v(y_i)\big) + 1$ si $1 \leqslant i \leqslant t$ et $r = \mathrm{rg}(u) = \sum_{i=1}^{t} \dim\big(C_v(y_i)\big)$ car $\mathrm{Im}\,(u) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_v(y_i)$:

$$\boxed{\dim(F+G) = \Big(\sum_{i=1}^{t} \big(\dim\big(C_v(y_i)\big) + 1\big)\Big) + n - r - t = r + t + n - r - t = n = \dim(E).}$$

Comme $F + G \subset E$, l'égalité des dimensions de $F+G$ et de E implique l'égalité $E = F \oplus G$. Enfin, comme $u(e_k) = 0$ si $1 \leqslant k \leqslant n-r-t$, $s(e_k) = 1$, $C_u(e_k) = \mathrm{vect}(e_k)$ et $G = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{n-r-t}) = \bigoplus_{k=1}^{n-r-t} \mathrm{vect}(e_k) = \bigoplus_{k=1}^{n-r-t} C_u(e_k)$ donc

$$\boxed{E = \Big(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{k=1}^{n-r-t} C_u(e_k)\Big)}$$

et la propriété H_{p+1} est démontrée.
Le principe de récurrence permet de conclure que H_p est vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } E \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace de dimension finie et } u \in \mathcal{L}(E) \text{ nilpotent, } \exists t \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_1, \dots, x_t) \in E^t,\ E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).}$$

31. Dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$, c'est-à-dire dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_t})$ obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_{x_i}$ de $C_u(x_i)$ vues à la question 29, la matrice de u se trouve directement avec les résultats prouvés dans cette même question :

$$\boxed{[u]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)}).}$$

II.B - Partitions d'entiers

32. D'après la question 30, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ (avec $k = t$) et $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_u(x_i)$.

En passant aux dimensions dans cette somme directe, on obtient grâce à la question 29 :

$$n = \dim(E) = \sum_{i=1}^{k} \dim\big(C_u(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{k} s(x_i).$$

Comme à la question 31, il existe une base de E adaptée à cette décomposition, du type $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_k})$ obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_{x_i}$ des $C_u(x_i)$. On sait que $[u]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_k)})$. Quitte à renuméroter les vecteurs $x_1, \dots, x_k$, on peut supposer que $s(x_1) \geqslant \cdots \geqslant s(x_k) \geqslant 1$. Alors $\sigma = \big(s(x_1), \dots, s(x_k)\big) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est une partition de $n = s(x_1) + \cdots + s(x_k)$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_k})$ (après renumérotation) est une base de E telles que

$$\boxed{[u]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_k)}) = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_k}) \text{ (notée } N_\sigma).}$$

33. Par définition, $J_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha-1} E_{i+1,i}$. Si $1 \leqslant j \leqslant \alpha-1$ et qu'on suppose que $J_\alpha^j = \sum_{i=1}^{\alpha-j} E_{i+j,i}$, alors

$$J_\alpha^{j+1} = \Big(\sum_{i_1=1}^{\alpha-j} E_{i_1+j,i_1}\Big) \times \Big(\sum_{i_2=1}^{\alpha-1} E_{i_2+1,i_2}\Big) = \sum_{i_1=2}^{\alpha-j} E_{i_1+j,i_1} \times E_{i_1,i_1-1} = \sum_{i_1=2}^{\alpha-j} E_{i_1+j,i_1-1} = \sum_{i=1}^{\alpha-(j+1)} E_{i+j+1,i}$$

car $E_{i_1+j,i_1} \times E_{i_2+1,i_2} = 0$ si $i_2 \neq i_1 - 1$ toujours en utilisant la relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ et en effectuant le changement $i = i_1 - 1$ dans la dernière somme. Par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall j \in [\![1,\alpha]\!],\ J_\alpha^j = \sum_{i=1}^{\alpha-j} E_{i+j,i}\ (R).}$$

Si $0 \leqslant j \leqslant \alpha-1$, on a $J_\alpha^j = \sum_{i=1}^{\alpha-j} E_{i+j,i}$ (ça marche même si $j=0$ car $J_\alpha^0 = I_\alpha$) donc J_α^j est constituée de 1 sur la j-ième sous-diagonale (et il y a $\alpha - j$ fois le chiffre 1) et de 0 partout ailleurs. Le rang d'une telle matrice est clairement $\alpha - j$. De plus, pour $j = \alpha$ dans (R), on obtient $J_\alpha^\alpha = 0$, donc

$$\boxed{\forall j \geqslant \alpha,\ \mathrm{rg}(J_\alpha^j) = 0 \text{ et } \forall j \in [\![0,\alpha-1]\!],\ \mathrm{rg}(J_\alpha^j) = \alpha - j.}$$

Ce qui précède justifie, puisque $J_\alpha^{\alpha-1} = E_{\alpha,1} \neq 0$ et $J_\alpha^\alpha = 0$, que

$$\boxed{J_\alpha \text{ est nilpotente d'indice } \alpha.}$$

34. Par hypothèse, u est nilpotent d'indice p donc $N_\sigma = [u]_\mathcal{B} = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k})$ (voir question 32) est aussi nilpotente d'indice p. Par calcul par blocs, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $N_\sigma^m = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u^m) = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}^m, \ldots, J_{\alpha_t}^m)$. Ainsi,

$$\boxed{N_\sigma^{\alpha_1} = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1}) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0) = 0}$$

car si $1 \leqslant i \leqslant k$, $\alpha_i \leqslant \alpha_1$ donc $J_{\alpha_i}^{\alpha_1} = 0$ puisque J_{α_i} est nilpotente d'indice α_i d'après la question précédente. De plus,

$$\boxed{N_\sigma^{\alpha_1-1} = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1}, \ldots, J_{\alpha_k}^{\alpha_1-1}) \neq 0}$$

car $J_{\alpha_1}^{\alpha_1-1} \neq 0$ d'après la question 33. Tout ceci permet de conclure que α_1 est l'indice de nilpotence de N_σ :

$$\boxed{\alpha_1 = p.}$$

35. Soit un entier naturel j, comme N_σ est diagonale par blocs, $N_\sigma^j = \mathrm{diag}(J_{\alpha_1}^j, \ldots, J_{\alpha_k}^j)$ l'est aussi d'où

$$\mathrm{rg}(N_\sigma^j) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j).$$

Or, on a vu en question 33 que $\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = 0$ si $j \geqslant \alpha_i$ et $\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \alpha_i - j$ si $j \leqslant \alpha_i$. On peut résumer ceci en $\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \max(0, \alpha_i - j)$. Or, si $j \notin \Lambda_j$, on a $j > \alpha_i$ donc $\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = 0$. On peut donc conclure que

$$\boxed{\mathrm{rg}(N_\alpha^j) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \sum_{i\in\Lambda_j} \mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j) = \sum_{i\in\Lambda_j} \max(0, \alpha_i - j) = \sum_{i\in\Lambda_j} (\alpha_i - j).}$$

36. Avec une des bases $\mathcal{B}$ de la question 32, $[u]_\mathcal{B} = N_\sigma$ donc $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u^j) = N_\sigma^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. On sait qu'alors, $\mathrm{rg}(u^j) = \mathrm{rg}(N_\sigma^j)$ donc $d_j = \mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^j) = \mathrm{rg}(N_\sigma^{j-1}) - \mathrm{rg}(N_\sigma^j)$ ce qui donne, avec la question précédente

$$d_j = \sum_{i\in\Lambda_{j-1}} \big(\alpha_i - (j-1)\big) - \sum_{i\in\Lambda_j} (\alpha_i - j).$$

Comme $\Lambda_j \subset \Lambda_{j-1}$ par définition, il vient

$$\begin{aligned} d_j &= \sum_{i\in\Lambda_{j-1}\setminus\Lambda_j} \big(\alpha_i - (j-1)\big) + \sum_{i\in\Lambda_j} \big(\alpha_i - (j-1)\big) - \sum_{i\in\Lambda_j} (\alpha_i - j) \\ &= \sum_{i\in\Lambda_{j-1}\setminus\Lambda_j} \big(\alpha_i - (j-1)\big) + \sum_{i\in\Lambda_j} \Big[\big(\alpha_i - (j-1)\big) - \big(\alpha_i - j\big)\Big] \quad . \end{aligned}$$

De plus, si $i \in \Lambda_{j-1}\backslash\Lambda_j$, on a $\alpha_i = j-1$ donc $\sum_{i\in\Lambda_{j-1}\backslash\Lambda_j} \big(\alpha_i-(j-1)\big) = 0$. Enfin, comme $\big(\alpha_i-(j-1)\big)-\big(\alpha_i-j\big) = 1$, il ne reste donc dans l'expression ci-dessus de d_j que

$$\boxed{d_j = \sum_{i\in\Lambda_j} 1 = \mathrm{card}(\Lambda_j) \text{ est le nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ dont la taille } \alpha_i \text{ est supérieure ou égale à } j.}$$

37. Puisque tout bloc J_{α_i} est de taille supérieure ou égale à 1 par construction : $k = \mathrm{card}(\Lambda_1)$. La question précédente montre donc que $k = d_1 = \mathrm{rg}(u^0) - \mathrm{rg}(u^1)$ donc, d'après la formule du rang :

$$k = \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_E) - \mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u) = \dim(\ker(u)).$$

$$\boxed{\text{Le nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ intervenant dans } N_\sigma \text{ vaut donc la dimension du noyau de } u.}$$

38. Si $1 \leqslant j \leqslant n$, les entiers $i \in [\![1,k]\!]$ tels que $\alpha_i = j$ sont exactement ceux qui vérifient $\alpha_i \geqslant j$ mais pas $\alpha_i \geqslant j+1$. Ceci s'écrit de manière ensembliste

$$T_j = \{i \in [\![1,k]\!] \mid \alpha_i = j\} = \Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1}.$$

Comme $\Lambda_{j+1} \subset \Lambda_j$, on obtient $\mathrm{card}(T_j) = \mathrm{card}(\Lambda_j) - \mathrm{card}(\Lambda_{j+1}) = d_j - d_{j+1}$. Ainsi, avec la question 36,

$$d_j - d_{j+1} = \mathrm{rg}(u^{j-1}) - \mathrm{rg}(u^j) - (\mathrm{rg}(u^j) - \mathrm{rg}(u^{j+1})) = \mathrm{rg}(u^{j-1}) - 2\mathrm{rg}(u^j) + \mathrm{rg}(u^{j+1}).$$

On conclut, avec la formule du rang appliquée à u^{j-1}, u^j et u^{j+1} :

$$\boxed{\text{le nombre de blocs } J_{\alpha_i} \text{ de taille exactement égale à } j \text{ vaut } \begin{cases} \mathrm{rg}(u^{j-1}) - 2\mathrm{rg}(u^j) + \mathrm{rg}(u^{j+1}) \\ = \\ 2\dim\big(\ker(u^j)\big) - \dim\big(\ker(u^{j-1})\big) - \dim\big(\ker(u^{j+1})\big). \end{cases}}$$

39. On sait avec la question 32 qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $[u]_{\mathcal{B}} = N_\sigma$ où σ est une partition de n. Supposons l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E et d'une partition $\sigma' = (\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{k'})$ de l'entier n telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = N_{\sigma'}$.
• D'après la question 37, le nombre de blocs de J_{α_i} (resp. $J_{\alpha'_i}$) intervenant dans N_σ (resp. $N_{\sigma'}$) vaut $k = \dim\big(\ker(u)\big)$ (resp. $k' = \dim\big(\ker(u)\big)$). Par conséquent, $k = k'$ et les deux partitions σ et σ' ont le même nombre d'éléments.
• D'après la question 34, $\alpha_1 = \alpha'_1 = p$ est l'ordre de nilpotence de u.
• D'après la question 38, si $1 \leqslant j \leqslant n$, en notant $T_j = \{i \in [\![1,k]\!] \mid \alpha_i = j\}$ et $T'_j = \{i \in [\![1,k]\!] \mid \alpha'_i = j\}$, on a $\mathrm{card}(T_j) = \mathrm{card}(T'_j) = \mathrm{rg}(u^{j-1}) - 2\mathrm{rg}(u^j) + \mathrm{rg}(u^{j+1})$ donc σ et σ' ont autant de termes égaux à j.
Tout ce qui précède montre (le dernier argument suffisait) que s'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que

$$\boxed{N_\sigma = [u]_{\mathcal{B}} \text{ et } N_{\sigma'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u), \text{ alors } \sigma = \sigma'.}$$

40. On a vu en questions 32 et 39 que tout endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n pouvait être représenté (dans une base $\mathcal{B}$) par une matrice N_σ avec une unique partition σ de Γ_n. Ceci nous conduit à poser

$$F = \{N_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_n\},$$

et les matrices de F ne sont pas semblables entre elles.
Réciproquement, soit un ensemble $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contenant des matrices nilpotentes non semblables deux à deux. Comme toute matrice M de G est semblable à une seule matrice N_σ de F, on peut définir l'application $\Psi : G \to F$ telle que $\Psi(M) = N_\sigma$. L'injectivité de Ψ garantit que $\mathrm{card}(G) \leqslant \mathrm{card}(F)$. En conclusion :

$$\boxed{\text{le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes non semblables deux à deux de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est } \mathrm{card}(\Gamma_n).}$$

On peut résumer ceci en concluant que le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vaut $\mathrm{card}(\Gamma_n)$, noté traditionnellement p_n (nombres de partitions de n).
Les mathématiciens Hardy et Ramanujan ont prouvé l'équivalent suivant en 1918 :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

II.C - Applications

41. On vérifie d'abord la nilpotence de A. Après calculs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = 0,$$

donc A est bien nilpotente d'indice $p = 3$. De plus, les colonnes 2, 3 et 5 de A forment assez clairement une famille libre, la première colonne de A est nulle et la quatrième est l'opposée de la troisième, ce qui justifie que $\mathrm{rg}(A) = r = 3$. Ainsi, $\dim\big(\ker(A)\big) = 5 - 3 = 2$ donc A est semblable à N_σ avec $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2)$ une partition de 5 avec la question 37. De plus, d'après la question 34, on a $\alpha_1 = p = 3$. Par conséquent, $\alpha_2 = 5 - \alpha_1 = 2$. Au final,

$$\boxed{A \text{ est semblable à } N_\sigma = \mathrm{diag}(J_3, J_2).}$$

Même si ce n'est pas demandé, cherchons une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^5$ telle que la matrice de l'endomorphisme u canoniquement associé à A soit N_σ. Cherchons parmi les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ un vecteur e_i tel que, d'après la question 29, $s(e_i) = 3 = \dim\big(C_u(e_i)\big)$. Or,

— $u(e_1) = 0$ donc $s(e_1) = 1$.

— $u(e_2) = (-1, 0, 1, 1, 1)$, $u^2(e_2) = (-1, 0, 0, 0, 0)$ et $u^3(e_2) = 0$ donc $s(e_2) = 3$.

— $u(e_3) = (2, 0, 0, 0, -1)$, $u^2(e_3) = (1, 0, 0, 0, 0)$ et $u^3(e_3) = 0$ donc $s(e_3) = 3$.

— $s(e_4) = s(e_3) = 3$ car $u(e_4) = -u(e_3)$.

— $u(e_5) = (-1, 0, 0, 0, 0)$ et $u^2(e_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ donc $s(e_5) = 2$.

Prenons par exemple $x_1 = e_2$. Il suffit maintenant de trouver un vecteur x_2 de $\mathbb{C}^5$ tel que $s(x_2) = 2$ (c'est-à-dire $x_2 \in \ker(u^2) \setminus \ker(u)$) et tel que $\big(x_1, u(x_1), u^2(x_1), x_2, u(x_2)\big) = \big(e_2, u(e_2), u^2(e_2), x_2, u(x_2)\big)$ soit une base de $\mathbb{C}^5$. On ne peut pas prendre e_5 car $u(e_5) = u^2(e_2)$. La valeur de A^2 nous pousse à choisir par exemple $x_2 = e_2 + e_3$ de sorte que $u(x_2) = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $u^2(x_2) = 0$. Posons $\mathcal{B} = \big(x_1, u(x_1), u^2(x_1), x_2, u(x_2)\big)$, alors

$$\text{la matrice de } \mathcal{B} \text{ dans la base canonique } \mathcal{B}_{can} \text{ est } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant de P vaut -1 (calcul facile), P est inversible donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^5$ et

$$\boxed{[u]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = N_\sigma = \mathrm{diag}(J_3, J_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

42. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme canoniquement associé à M. On sait d'après la question 31 qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{x_1}, \dots, \mathcal{B}_{x_k})$ (avec $\mathcal{B}_{x_i} = \big(x_i, \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\big)$) adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_u(x_i)$ de la question 30 telle que $[u]_{\mathcal{B}} = N_\sigma = \mathrm{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_k)})$ où $\sigma = \big(s(x_1), \dots, s(x_k)\big) \in \Gamma_n$.

D'après le cours et la formule de changement de bases pour les matrices d'endomorphisme, on sait que deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Il suffit donc dans cette question de montrer que $2M$ et M^T sont des matrices de u dans d'autres bases que $\mathcal{B}$.

• Posons, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, la nouvelle base $\mathcal{B}'_{x_i} = \left(x_i, 2u(x_i), \ldots, 2^{s(x_i)-1}u^{s(x_i)-1}(x_i)\right)$ de $C_u(x_i)$ (on n'a fait que multiplier les vecteurs par des scalaires non nuls). Alors $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}'_{x_1}, \ldots, \mathcal{B}'_{x_k})$ obtenue à nouveau en concaténant les bases $\mathcal{B}'_{x_i}$ de $C_u(x_i)$ est une base de E et on vérifie sans peine que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{diag}(2J_{s(x_1)}, \ldots, 2J_{s(x_k)}) = 2M$.

• Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, la nouvelle base $\mathcal{B}''_{x_i} = \left(u^{s(x_i)-1}(x_i), \ldots, u(x_i), x_i\right)$ de $C_u(x_i)$ (on ne fait que prendre les vecteurs dans le sens contraire). Alors $\mathcal{B}'' = (\mathcal{B}''_{x_1}, \ldots, \mathcal{B}''_{x_k})$ encore obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}''_{x_i}$ de $C_u(x_i)$ est une base de E et on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \mathrm{diag}(J^T_{s(x_1)}, \ldots, J^T_{s(x_k)}) = M^T$.

En conclusion, ce qui précède justifie bien que

$$\boxed{\text{si } M \text{ est nilpotente, les matrices } M,\ 2M \text{ et } M^T \text{ sont semblables.}}$$

On peut montrer en généralisant (en un sens à préciser) la décomposition de Frobenius de la question 30 à toutes les matrices (pas seulement les matrices nilpotentes) qu'une matrice carrée et sa transposée sont toujours semblables.

43. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M et $2M$ sont semblables. Notons λ la valeur propre de M de module maximal. Il existe donc un vecteur X non nul tel que $MX = \lambda X$. Alors $2MX = 2\lambda X$ donc 2λ est valeur propre de $2M$. Mais comme M et $2M$ sont semblables, elles ont même rang, même spectre, même polynôme caractéristique, même trace.... En particulier 2λ est une valeur propre de M. Ainsi, par maximalité du module de λ, on a $|2\lambda| \leqslant |\lambda|$, ce qui impose $|\lambda| = 0$. Par conséquent, M ne peut pas avoir d'autre valeur propre que 0. Mais M admet au moins une valeur propre puisque χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, $\mathrm{Spec}(M) = \{0\}$, et on conclut avec la question 15 que

$$\boxed{\text{si } M \text{ et } 2M \text{ sont semblables, alors } M \text{ est nilpotente.}}$$

II.D - Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

44. Si une partition $\sigma = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ appartient à $Y_{n,1}$, on a $1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 1$ et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$ ce qui impose $k = n$ et $\sigma = (1, \ldots, 1) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Ainsi,

$$\boxed{Y_{n,1} = \{(1, \ldots, 1)\} \text{ et } y_{n,1} = 1.}$$

45. Pour $j = n$, la relation s'écrit $y_{n,n} = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + 1$ d'après l'énoncé. Or $Y_{n,n}$ est l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n. Parmi celles-ci, une seule a un premier terme α_1 strictement supérieur à $n-1$ et c'est (n) (avec $k = 1$ et $\alpha_1 = n$). Toutes les autres ont un premier terme $\alpha_1 \leqslant n-1$ donc font partie de $Y_{n,n-1}$. On vient de justifier la partition $Y_{n,n} = Y_{n,n-1} \cup \{(n)\}$. En passant aux cardinaux, $y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1$ et on a bien

$$\boxed{y_{n,n} = y_{n,n-1} + y_{0,0}.}$$

46. Soit $j < n$, scindons $Y_{n,j}$ en deux parties :
• $Y_{n,j-1}$ formée des partitions $\sigma = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ telles que $j - 1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 1$ et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$.
• $Y^{(j)}_{n,j}$ formée des partitions $\sigma = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ telles que $j = \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 1$ et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$.
L'application $\varphi : Y^{(j)}_{n,j} \to Y_{n-j,j}$ telle que $\varphi(\sigma) = (\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ si $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in Y^{(j)}_{n,j}$ est bien définie. En effet, pour $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in Y^{(j)}_{n,j}$, on a $\alpha_1 = j$ donc $j \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 1$ et $\alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n - j$. De plus, l'unique antécédent de $\sigma' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in Y_{n-j,j}$ par φ est $(j, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in Y^{(j)}_{n,j}$ ce qui justifie que φ est bijective.
Comme une bijection conserve les cardinaux, on a $\mathrm{card}(Y^{(j)}_{n,j}) = \mathrm{card}(Y_{n-j,j})$. Or $Y_{n,j} = Y_{n,j-1} \cup Y^{(j)}_{n,j}$ (réunion disjointe) donc $\mathrm{card}(Y_{n,j}) = \mathrm{card}(Y_{n,j-1}) + \mathrm{card}(Y^{(j)}_{n,j}) = \mathrm{card}(Y_{n,j-1}) + \mathrm{card}(Y_{n-j,j})$. Par conséquent,

$$y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}.$$

Considérons maintenant deux cas :
- si $j \leqslant n - j$, alors $\min(n-j, j) = j$ donc la relation ci-dessus s'écrit bien $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
- si $j > n - j$, comme le plus grand élément d'une partition de l'entier $n - j$ ne peut clairement pas excéder $n - j$, on a $Y_{n-j,j} = Y_{n-j,n-j} = Y_{n-j,\min(n-j,j)}$ donc $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$ et on a à nouveau $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}$.
On vient de prouver que si $j < n$, on avait bien $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}$ dans tous les cas. Si on inclut le cas $j = n$ de la question 45,

$$\boxed{\forall j \in [\![2, n]\!],\ y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}.}$$

47. On connaît $y_{0,0} = 1$. Les exemples de l'énoncé au début de la question II.B montrent que $y_{1,1} = 1$, $y_{2,2} = 2$, $y_{2,1} = 1$, $y_{3,3} = 3$, $y_{3,2} = 2$ et $y_{3,1} = 1$. D'après la question 44, on a aussi $y_{4,1} = y_{5,1} = 1$.
On se sert ensuite de la formule de récurrence $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$ pour avoir $y_{4,2} = y_{4,1} + y_{2,2} = 3$, $y_{4,3} = y_{4,2}+y_{1,1} = 4$ et $y_{4,4} = y_{4,3}+1 = 5$ (d'après la question 45) puis $y_{5,2} = y_{5,1}+y_{3,2} = 3$, $y_{5,3} = y_{5,2}+y_{2,2} = 5$, $y_{5,4} = y_{5,3} + y_{1,1} = 6$ et $y_{5,5} = y_{5,4} + 1 = 7$. On pouvait aussi compter en décrivant de manière exhaustive les ensembles $Y_{4,4} = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\}$ et $Y_{5,5} = \{(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1\}$.
Voici le tableau récapitulatif des $y_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 5$:

$y_{n,j}$	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
n=1	1				
n=2	1	2			
n=3	1	2	3		
n=4	1	3	4	5	
n=5	1	3	5	6	7

.

48. Il suffit d'utiliser la formule de récurrence $y_{i,j} = y_{i,j-1}+y_{i-j,\min(i-j,j)}$ avec $1 \leqslant j \leqslant i$ avec les conditions initiales $y_{k,1} = 1$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ pour obtenir la valeur de $y_{n,n}$.

On peut écrire cette fonction en style récursif

```
def Y(n) :
    def Z(m,j) :
        if m == 0 :
            if j == 0 :
                return 1
            else :
                return 0
        else :
            if j == 0 :
                return 0
            elif j == 1 :
                return 1
            else :
                k = min(j,m-j)
                return Z(m,j-1)+Z(m-j,k)
    return Z(n,n)
```

ou en style impératif

```
def Y(n) :
    T = [[0]*(n+1) for _ in range(n+1)]
    T[0][0] = 1
    for n in range(1,n+1) :
        T[n][1] = 1
    for n in range(2,n+1) :
        for j in range(2,n+1) :
            T[n][j] = T[n][j-1] + T[n-j][min(j,n-j)]
    return T[n][n]
```

Comme Python ne mémorise pas les résultats intermédiaires dans la version récursive, la complexité ne doit pas être très bonne et cette option est donc peu pertinente. Par contre, la complexité (temporelle et spatiale) de la fonction en mode impératif est en $O(n^2)$: classique lorsqu'on veut calculer les éléments d'un tableau bidimensionnel.

On obtient par exemple, en plus des 5 premières lignes vues à la question 47 :

$y_{n,j}$	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9	j=10
n=6	1	4	7	9	10	11				
n=7	1	4	8	11	13	14	15			
n=8	1	5	10	15	18	20	21	22		
n=9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	
n=10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42

.

Et, si on s'intéresse uniquement aux nombres de partitions $p_n = y_{n,n}$, alors (voir https ://oeis.org/A000041) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490

49. D'après la question 40, $p(n) = y_{n,n}$ est le nombre de classes d'équivalence dans l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour la relation d'équivalence "être semblable à" (relation de similitude). Par exemple, pour $n = 5$ comme dans l'exemple de la question 41, comme les 7 partitions de 5 sont données par

$$\Gamma_5 = \{(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)\},$$

toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ est donc semblable à l'une des 7 matrices suivantes :

$$N_{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_{(4,1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_{(3,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_{(2,2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_{(2,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_{(1,1,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$