Devoir supplémentaire n° 1, une correction

Exercice

1. Le polynôme P_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considère la propriété $\mathcal{P}(n)$: « P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} ».
   - On a bien $\mathcal{P}(1)$ puisque $P_1 = X$ et $\mathcal{P}(2)$ puisque $P_2 = 2X^2 - 1$.
   - Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
     On a $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$. D'après $\mathcal{P}(n)$, il existe $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n = 2^{n-1}X^n + R$. Ainsi, $P_{n+1} = 2^nX^{n+1} + 2XR - P_{n-1}$. D'après $\mathcal{P}(n-1)$, $\deg P_{n-1} = n-1$ donc $\deg(2XR - P_{n-1}) \leqslant \max(\deg(XR), \deg(P_{n-1})) \leqslant n$. On peut donc conclure que P_{n+1} est de degré $n+1$ et que son coefficient dominant est 2^n. On a bien démontré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « $\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ ».
   - Pour $n = 0$, on a bien pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0.\theta)$.
     Pour $n = 1$, on a bien pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta.P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)$ donc $P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta.\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$. Mais, $2\cos\theta.\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ donc finalement, $P_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$.
     On a bien montré que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. • La fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.
   • De plus, $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-t}$ et ainsi
   $$\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right).$$
   Or, par Riemann, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $[0,1[$ donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0,1[$.
   • On procède de même en -1.

4. Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_k[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   • Pour tout $t \in]-1,1[$ on a $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$ donc $\langle P,Q\rangle = \langle Q,P\rangle$. Cela prouve la symétrie.
   • Pour tout $t \in]-1,1[$ on a, $(\lambda P+Q)(t)R(t) = \lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t)$ donc $\int_{-1}^{1} \frac{(\lambda P+Q)(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et, par linéarité de l'intégrale, cela est donc $\lambda\int_{-1}^{1} \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.
   Ainsi, $\langle \lambda P+Q, R\rangle = \lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle$. On a ainsi prouvé la linéarité à gauche. Par symétrie, on obtient donc la bilinéarité.
   • Puis, $\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et cela est positif par positivité de l'intégrale.
   • Enfin, si $\langle P,P\rangle = 0$, comme $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, on a pour tout $t \in]-1,1[$, $P^2(t) = 0$; ainsi P a une infinité de racines et est donc nul.
   On a bien montré que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.

5. Soient n et m entiers naturels.
Par linéarisation, on a

$$\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Or, pour $k=0$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi$ et pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{k}(\sin(0)-\sin(k\pi)) = 0$.
Finalement :

$$\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m=n\neq 0 \\ \pi & \text{si } m=n=0 \end{cases}$$

6. Vérifions que la famille $(P_0,...,P_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.
Soit $(i,j)\in[\![0,k]\!]^2$ avec $i\neq j$.
On a $\langle P_i,P_j\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. On pose $t=\cos\theta$ dans cette intégrale avec $\theta\in]0,\pi[$.
On obtient, $\langle P_i,P_j\rangle = \displaystyle\int_0^\pi P_i(\cos\theta)P_j(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
Par la question 5, c'est aussi $\displaystyle\int_0^\pi \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$.
Comme les P_i sont non nuls, la famille $\left(\frac{P_0}{||P_0||},...,\frac{P_k}{||P_k||}\right)$ est une famille orthonormée, donc libre, de $\mathbb{R}_k[X]$ et comme elle est de cardinal k, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.
Il nous reste donc à calculer les $||P_i||$. Or, pour i entier non nul, $||P_i||^2 = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2(i\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$.
Finalement, la famille $\left(\frac{P_0}{\sqrt{\pi}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}P_1,...,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}P_k\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$.

Problème - Matrices de rang 1

Partie I – Exemples

1. Comme toutes les colonnes de M sont proportionnelles à la colonne U, la matrice M est de rang inférieur à 1. Ainsi $Y(\Omega)=\{0,1\}$ et Y suit une loi de Bernoulli.
Puis $P(Y=0)=P(M=0)=P(U=0)=P(X_1=0,\ldots,X_n=0)=\displaystyle\prod_{i=1}^n P(X_i=0)$ par indépendance.
Ainsi $P(Y=0)=(1-p)^n$ donc Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

2. On a $\mathrm{Tr}(M)=\sum_{i=1}^n X_i$. Comme les X_i sont mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$, on a $\mathrm{Tr}(M)\sim\mathcal{B}(n,p)$.

3. • On a $M^2=UU^TUU^T$. Mais, $U^TU=\sum_{i=1}^n X_i^2$. Comme les X_i valent 0 ou 1, on a aussi $U^TU=\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i = \mathrm{Tr}(M)$.
Ainsi : $M^2=\mathrm{Tr}(M)UU^T=\mathrm{Tr}(M)M$.

• Notons A l'événement : « M est une matrice de projection ».
On a $P(A)=P(M^2=M)=P(\mathrm{Tr}(M)M=M)=P([\mathrm{Tr}(M)=1]\cup[M=0])$.
Or, les événements « $\mathrm{Tr}(M)=1$ » et « $M=0$ » sont disjoints donc

$$P(A)=P(\mathrm{Tr}(M)=1)+P(M=0).$$

D'après les questions 1 et 2, il vient $P(A) = \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p + (1-p)^n$.

4. Il s'agit toujours de calculer $P(M=0)$ et $P(\mathrm{Tr}(M)=1)$.
On a comme précédemment $P(M=0) = P(X_1=0)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda}$.
Puis, $P(\mathrm{Tr}(M)=1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X_1=0,...,X_{i-1}=0,X_i=1,...,X_n=0\right)$. Cette union est composée d'événements deux à deux disjoints donc

$$P(\mathrm{Tr}(M)) = \sum_{i=1}^{n} P(X_1=0,...,X_{i-1}=0,X_i=1,...,X_n=0).$$

Par indépendance mutuelle des X_i, toutes ces probabilités sont égales à $P(X_1=0)^{n-1}P(X_1=1)$ c'est-à-dire qu'on a $P(\mathrm{Tr}(M)=1) = n\mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda$.

5. • La matrice J est de rang 1 et de trace n.

• On obtient $J^2 = nJ$ donc $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J qui est simplement scindé puisque c'est $X(X-n)$.
Ainsi, J est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{0,n\}$.
Comme J est de rang 1, son noyau est de dimension $n-1$ qui est donc aussi la dimension de E_0.
De plus, puisque toutes les colonnes de J sont égales, $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de E_0 : c'en est donc une base.
E_n est alors de dimension 1 et comme $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in E_n$, on conclut que $E_n = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$.
Finalement, d'après les formules de changement de base, on a

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&...&1\\-1&0&0&...&1\\0&-1&0&...&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&...&1\end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix}0&0&0&...&0\\0&0&0&...&0\\0&0&0&...&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&...&n\end{pmatrix} P^{-1}.$$

6. Soit $A = \begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$.
Cette matrice est de rang 1 donc le sous-espace associé à la valeur propre 0 est de dimension 2.
On a $A^3 = 0$ donc $\mathrm{Spec}(A) \subset \{0\}$: si A est diagonalisable elle est semblable donc égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas..
Ainsi A n'est pas diagonalisable (et sa trace est nulle).

Partie II – Résultats généraux

7. Comme A est de rang 1, si on note C_1,...,C_n ses vecteurs colonnes, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = a_i C$.
Soit $L = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)$, on a alors $A = CL$.

8. Si on note c_1,...,c_n les coefficients de C, on a $LC = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$. Et on constate que c'est aussi la trace de A.
   Ainsi, $A^2 = CLCL = C(LC)L = \mathrm{Tr}(A)CL = \mathrm{Tr}(A)A$.

9. Comme A est de rang 1, E_0 est de dimension $n-1$. D'après le cours, il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-1}(X-c)$. De plus, on sait que le coefficient de X^{n-1} dans χ_A est $-\mathrm{Tr}(A)$. Ainsi, $c = \mathrm{Tr}(A)$.
   Finalement, $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.

10. D'après le cours, A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et que la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité géométrique. Comme A est de rang $\dim\ker A = n-1$ et la multiplicité algébrique de 0 est égale à sa multiplicité géométrique si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
    De plus dans le cas $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, la seconde valeur propre de A est simple donc sa multiplicité algébrique est égale à sa multiplicité géométrique.
    On a donc bien A diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

11. On sait, par le théorème du rang, que $\dim \mathrm{Im}(u) = 1$. Ainsi, comme $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$, on a $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)) \geqslant 1$ et comme par ailleurs, $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \subset \mathrm{Im}(u)$, on a donc $\mathrm{Im}(u) \cap \ker u = \mathrm{Im}(u)$ c'est-à-ire qu'on a $\mathrm{Im}(u) \subset \ker u$.
    Soit $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(e_1) \neq 0$. On pose $e_2 = u(e_1)$. Comme $e_2 \in \mathrm{Im}(u)$, on a $e_2 \in \ker u$. On complète ensuite (e_2) en une base de $\ker u$: $(e_2, ..., e_n)$.
    Vérifions que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$: comme elle est de cardinal n, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$. En appliquant u, on obtient $\lambda_1 u(e_1) = 0$. Mais $u(e_1) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
    Ainsi, on a $\lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$ et $(e_2, ..., e_n)$ est libre d'où la nullité de λ_2,...,λ_n.
    Dans cette base, la représentation matricielle de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

12. Par théorème du rang, $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker u = \mathbb{R}^n$.
    On considère (e_1) une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $(e_2, ..., e_n)$ une base de $\ker u$.
    Alors, $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (par concaténation de deux bases de deux sev de $\mathbb{R}^n$ supplémentaires). De plus, $u(e_1) \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_1) = ae_1$.
    Dans cette base, on obtient la base demandée :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

    On a $a \neq 0$ car si a était nul, u serait l'application nulle ce qui n'est pas le cas.

13. On sait déjà par le cours que deux matrices semblables ont le même trace.

    Réciproquement, soit A et B deux matrices de rang 1 et de même trace. Si leur trace est nulle, elles sont toutes les deux semblables à la matrice de la question 23 et sont donc semblables. Si leur

trace n'est pas nulle, elles sont toutes les deux semblables à une matrice de la question 24. Par ailleurs, le coefficient a sera bien le même puisqu'il est égal à la trace de la matrice. Ainsi, A et B sont semblables.