Devoir supplémentaire n° 1

Pour le mercredi 16 septembre 2026

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Exercice

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.
2. Justifier que pour tout réel θ :
$$P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier la convergence de cette intégrale impropre.
2. Démontrer que $\langle\,,\,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).
3. Calculer pour n et m entiers naturels, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
4. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Problème - Matrices de rang 1

Partie I – Exemples

On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = U \times U^{\top} = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $Y = \mathrm{rg}(M)$.
Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.
2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Tr}(M)$.

3. Vérifier que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement «M est une matrice de projection».
4. Dans cette question, on suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice M comme ci-dessus.

   Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement «M est une matrice de projection».
5. On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).
6. Donner (en justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II – Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

7. On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.
8. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
9. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
10. Établir que

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

11. On suppose que $\mathrm{Im}\,(u) \cap \ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
    Justifier que $\mathrm{Im}\,(u) \subseteq \ker(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

12. On suppose que $\mathrm{Im}\,(u) \cap \ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
    Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

    où a est un réel non nul.
13. Conclure que dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.