Un problème d'algèbre linéaire, niveau +, une correction

Partie I

1. a. • Si $x \in \ker L^i$ on a $L^i(x) = 0$ donc $L(L^i(x)) = 0$ et ainsi $L^{i+1}(x) = 0$ donc $\boxed{\ker L^i \subset \ker L^{i+1}}$.

   • Si $y \in \operatorname{Im} L^{i+1}$ alors il existe x dans E tel que $y = L^{i+1}(x) = L^i(L(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} L^i$ et ainsi $\boxed{\operatorname{Im} L^{i+1} \subset \operatorname{Im} L^i}$.

   • Supposons que $\ker L^i = \ker L^{i+1}$. Le théorème du rang affirme alors que :

   $$\dim \operatorname{Im} L^i = n - \dim\ker L^i = n - \dim\ker L^{i+1} = \dim \operatorname{Im} L^{i+1}.$$

   Avec l'inclusion $\operatorname{Im} L^{i+1} \subset \operatorname{Im} L^i$ on peut conclure que $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$.

   Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$. Le théorème du rang permet encore de dire que :

   $$\dim\ker L^{i+1} = \dim\ker L^i$$

   et l'inclusion $\ker L^i \subset \ker L^{i+1}$ entraîne l'égalité $\ker L^i = \ker L^{i+1}$.

   Conclusion. On a $\boxed{\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1} \Leftrightarrow \ker L^i = \ker L^{i+1}}$.

   • Supposons maintenant que $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$. On a alors $L(\operatorname{Im} L^i) = L(\operatorname{Im} L^{i+1})$ i.e. $\operatorname{Im} L^{i+1} = \operatorname{Im} L^{i+2}$ ce qui entraîne sans peine (à écrire…) que $\operatorname{Im} L^j = \operatorname{Im} L^i$ pour tout entier $j \geqslant i$.

   b. Supposons que $\ker L^i \neq \mathcal{E}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ker L^i = \ker L^{i+1}$. D'après la question précédente, cela entraîne que $\operatorname{Im} L^j = \operatorname{Im} L^i$ pour tout entier $j \geqslant i$. Prenons $j = i+p$. Comme $L^p = 0$ il vient $\operatorname{Im} L^{i+p} = \{0\}$ donc $\operatorname{Im} L^i = \{0\}$ ce qui impose $\ker L^i = \mathcal{E}$ et amène donc une contradiction.

   c. • D'après la question 1 on a déjà :

   $$\ker L^0 = \{0\} \subset \ker L \subset \cdots \subset \ker L^p = \mathcal{E}.$$

   Pour i dans $\{0, \ldots, p\}$ notons d_i la dimension de $\ker L^i$. La suite $(d_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ est donc croissante. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe i dans $\{0, \ldots, p-1\}$ tel que $d_i = d_{i+1}$. On a alors $\ker L^i = \ker L^{i+1}$ et le même raisonnement qu'à la question 1b. amène $\operatorname{Im} L^i = 0$ ce qui contredit le fait que p soit l'indice de nilpotence de L.
   Conclusion. La suite $(d_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ est strictement croissante.

   • Pour tout i dans $\{0, \ldots, p-1\}$ on a $d_i < d_{i+1}$ et, puiqu'il s'agit d'entiers, il vient $d_i + 1 \leqslant d_{i+1}$. Avec $d_0 = 0$ on obtient alors $d_i \geqslant i$ pour tout i dans $\{0, \ldots, p\}$. En particulier $d_p \geqslant p$; mais $d_p = n$ puisque $L^p = 0$ donc $n \geqslant p$ ce qui implique $\boxed{L^n = 0}$.

   • Supposons maintenant que $p = n$. On a $d_0 = 0$ et $d_i \geqslant i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ ce qui contraint chaque d_i à être égal à i.

   Conclusion. Si $p = n$, on a $\dim\ker L^i = i$ pour tout i dans $\{0, \ldots, n\}$.

2. a. Puisque L^h est de rang $n-h$, L^h n'est pas l'endomorphisme nul. Il en résulte que $h < p$ donc, avec les notations ci-dessus $d_h = h$ (via le théorème du rang) et on a toujours :

$$d_0 = 0 < d_1 \cdots < d_h = h.$$

Cela contraint encore $d_i = i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, h\}$ donc (par le théorème du rang) : $\mathrm{rg}(L^i) = n - i$ pour tout i dans $\{1, \ldots, h\}$.

b. L'application Λ est correctement définie (puisque $L(\mathrm{Im}\ L^i) = \mathrm{Im}\ L^{i+1}$), linéaire (puisque L est linéaire). Le théorème du rang affirme alors que :

$$\dim \mathrm{Im}\ L^i = \dim \ker \Lambda + \dim \mathrm{Im}\ \Lambda.$$

Mais on a $\ker \Lambda = \ker L \cap \mathrm{Im}\ L^i$ (pour le lecteur : facile...) et, de manière évidente, Λ est surjective donc $\mathrm{Im}\ \Lambda = \mathrm{Im}\ L^{i+1}$ et ainsi :

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}\ L^i = \dim \ker L \cap \mathrm{Im}\ L^i + \dim \mathrm{Im}\ L^{i+1}}.$$

c. • Comme $1 \in \{1, \ldots, h\}$, la question 2a assure que $\mathrm{rg}(L) = n-1$ ou encore $\ker L$ est une droite vectorielle. On a alors deux cas :
— ou bien $\ker L \subset \mathrm{Im}\ L^h$ i.e. $\ker L \cap \mathrm{Im}\ L^h = \ker L$;
— ou bien $\ker L \cap \mathrm{Im}\ L^h = \{0\}$ et alors, selon la question précédente, $\dim \mathrm{Im}\ L^h = \dim \mathrm{Im}\ L^{h+1}$ ce qui implique $L^h = L^{h+1}$ et (raisonnement déjà vu) il vient $L^h = 0$ ce qui est impossible puisque $\mathrm{rg}(L^h) = n - h$.

On est donc dans le premier cas et ainsi l'égalité de la question précédente amène :

$$\dim \mathrm{Im}\ L^h = 1 + \dim \mathrm{Im}\ L^{h+1}.$$

Ainsi $\mathrm{rg}(L^{h+1}) = n - (h+1)$. On itère alors ce raisonnement jusqu'à $h = n-1$ ce qui amène $\mathrm{rg}(L^{n-1}) = 1$ et $\mathrm{rg}(L^n) = 0$.

Conclusion. $\boxed{\text{L'indice de nilpotence de } L \text{ est } n}$.

3. a. Tout d'abord, pour tout x dans $\mathcal{F}$ on a $M^n(x) = L^n(x) = 0$, donc $M^n = 0$ et mieux, selon 1c, $M^r = 0$. Ainsi $\mathcal{F} = \ker M^r$.

Soit maintenant j dans $\{1, \ldots, r\}$. On a facilement $\ker M^j = \ker L^j \cap \mathcal{F}$. Puis on applique la question 2 avec $h = 1$: pour tout k dans $\{0, \ldots, n\}$ on a $\dim \ker L^k = k$ et en particulier $\dim \ker L^r = r$. Mais $\mathcal{F} = \ker M^r \subset \ker L^r$ donc $\boxed{\mathcal{F} = \ker L^r}$ (via l'égalité des dimensions).

Enfin $\ker L \subset \ldots \subset \ker L^r = \mathcal{F}$ donc $\ker L^j \subset \mathcal{F}$ donc $\ker M^j = \ker L^j \cap \mathcal{F} = \ker L^j$; en particulier $\ker L^r = \mathcal{F}$.

b. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ stable par L. Notons r sa dimension et supposons $r \geqslant 1$. La question précédent nous affirme que $\mathcal{F} = \ker L^r$.
Réciproquement chaque $\ker L^j$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ est un sous-espace stable par L (évident).

Conclusion. Les sous-espace de $\mathcal{E}$ stables par L sont exactement les sous-espaces $\ker L^j$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.

4. a. Comme $L^{p-1} \neq 0$, un tel vecteur e existe. Puis soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ des réels tels que :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^i(e) = 0.$$

On applique L^{p-1} à cette égalité. Comme $L^p = 0$ il reste $\alpha_0 L^{p-1}(e) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$ puisque $L^{p-1}(e) \neq 0$. Il reste alors :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i L^i(e) = 0.$$

On applique L^{p-2} à cette égalité pour obtenir $\alpha_1 = 0$. En itérant cette procédure on obtient :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$$

donc $\boxed{\text{la famille } (e, L(e), \ldots, L^{p-1}(e)) \text{ est libre}}$.

b. • Soient u, v dans E^* ainsi que λ réel. Tout d'abord $L(u)$ est bien un élément de E^*. Puis on a :

$${}^tL(u + \lambda v) = (u + \lambda v) \circ L = u \circ L + \lambda v \circ L = {}^tL(u) + \lambda {}^tL(v)$$

donc ${}^tL$ est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}^*$.

• Montrons que pour tout i dans $\mathbb{N}$ on a ${}^t(L^i) = ({}^tL)^i$Si on a ${}^t(L^i) = ({}^tL)^i$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$ alors pour tout u dans $\mathcal{E}^*$ on a :

$$\begin{aligned} ({}^tL)^{i+1}(u) &= {}^tL \circ ({}^tL)^i(u) = {}^tL \circ {}^t(L^i)(u) \\ &= {}^tL(u \circ L^i) = u \circ L^{i+1} = {}^t(L^{i+1})(u) \end{aligned}$$

donc $({}^tL)^{i+1} = {}^t(L^{i+1})$. Comme $({}^tL)^0 = {}^t(L^0)$, on peut conclure par récurrence.
Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } i \text{ dans } \mathbb{N} \text{ on a } {}^t(L^i) = ({}^tL)^i}$.

c. Notons que $({}^tL)^p = {}^t(L^p) = 0$ puisque $L^p = 0$. De plus $\underbrace{{}^t(L^{p-1})(\varepsilon)}_{\in \mathcal{E}^*}(e) \neq 0$ donc ${}^t(L^p)$ est un endomorphisme nilpotent d'indice p de $\mathcal{E}^*$. La même procédure qu'à la question 4a. permet de démontrer que $(\varepsilon, {}^tL(\varepsilon), \ldots, ({}^tL)^{p-1}(\varepsilon))$ est une famille libre de $\mathcal{E}^*$, donc $\boxed{\mathcal{H}^* \text{ est de dimension } p}$.

d. i. Notons que $\mathcal{H}$ est bien un sous-espace de $\mathcal{E}$ et on a $\dim \mathcal{H} = n - p$ puisque $\dim \mathcal{H} = p$.

En effet, par exemple, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$ telle que $(e_1, \ldots, e_m)$ soit une base de $\mathcal{H}$. On considère la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$; pour tout u dans $\mathcal{E}^*$ on a $u = \sum_{i=1}^{n} u(e_i) e_i^*$, donc $(e_{m+1}^*, \ldots, e_n^*)$ engendre $\mathcal{H}^*$, donc est une base de $\mathcal{H}^*$. Ainsi $\dim \mathcal{H}^* = n - m$.

ii. • Montrons que $\mathcal{H}$ est L-stable. Soit $x \in \mathcal{H}$. Pour tout $u \in \mathcal{H}^*$ on a $u(x) = 0$. Puisque $\mathcal{H}^* = \mathrm{vect}(\varepsilon, {}^tL(\varepsilon), \ldots, ({}^tL)^{p-1}(\varepsilon))$,pour tout i dans $\{0, \ldots, p-1\}$, on a :

$$({}^tL)^i(\varepsilon)(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad {}^t(L^i)(\varepsilon)(x) = 0.$$

Fixons i dans $\{0, \ldots, p-1\}$. On a :

$${}^t(L^i)(\varepsilon)(L(x)) = \varepsilon \circ L^i \circ L(x) = \varepsilon \circ L^{i+1}(x) = {}^t(L^{i+1})(x) = 0.$$

Tout élément u de $\mathcal{H}^*$ étant combinaison linéaire des ${}^t(L^i)(\varepsilon) = ({}^tL)^i(\varepsilon)$ pour dans $\{0, \ldots, p-1\}$ on peut conclure que $u(L(x)) = 0$ et ainsi $L(x) \in \mathcal{H}$.

Conclusion. $\boxed{\mathcal{H} \text{ est un sous-espace } L\text{-stable de } \mathcal{E}}$.

iii. Comme $\dim \mathcal{E} = n$, $\dim \mathcal{G} = p$ et $\dim \mathcal{H} = n - p$, pour montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$, il suffit de montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Prenons x dans $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$. Comme $x \in \mathcal{G}$ on peut écrire :

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^i(e)$$

où les α_i sont des réels.

Fixons j dans $\{0, \ldots, p-1\}$. Comme $({}^tL)^j(\varepsilon) \in \mathcal{H}^*$ et $x \in \mathcal{H}$, on a :

$$\underbrace{({}^tL)^j(\varepsilon)}_{\in \mathcal{E}^*}(x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon \circ L^j(x) = 0.$$

— En prenant $j = p-1$ on a $L^{p-1}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^{p-1}(L^i(e)) = \alpha_0 L^{p-1}(e)$ et ainsi :

$$0 = \varepsilon \circ L^{p-1}(x) = \alpha_0 \varepsilon \circ L^{p-1}(e) = \alpha_0 {}^t(L^{p-1})(\varepsilon)(e).$$

Mais ${}^t(L^{p-1})(\varepsilon)(e) \neq 0$ ce qui amène $\alpha_0 = 0$.

— On prend ensuite $j = p-2$ ce qui amène $\alpha_1 = 0$ et en itérant ce raisonnement on obtient :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0.$$

On peut donc dire que $x = 0$ et ainsi $\boxed{\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \{0\}}$.

Conclusion. $\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}}$.

e. i. • Montrons que $\mathcal{G}$ est L-stable. Soit $x \in \mathcal{G}$. On peut alors écrire $x = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^i(e)$ où les α_i sont des réels. Il vient par linéarité de L :

$$L(x) = L\left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^i(e)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^{i+1}(e).$$

Comme $L^p(e) = 0$, il reste : $L(x) = \sum_{i=0}^{p-2} \alpha_i L^{i+1}(e) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{i-1} L^i(e)$ donc $L(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $L^i(e)$ pour $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ ce qui assure que :

$$L(x) \in \mathrm{vect}(e, L(e), \ldots, L^{p-1}(e)) = \mathcal{G}.$$

Conclusion. $\boxed{\mathcal{G} \text{ est } L\text{-stable}}$.

• Montrons que l'endomorphisme induit $L_{\mathcal{G}}$ est nilpotent d'indice p. Pour x dans $\mathcal{G}$ on a :

$$L_{\mathcal{G}}^p(x) = L^p(x) = 0$$

puisque L est nilpotent d'indice p. De plus $L_{\mathcal{G}}^{p-1}(e) = L^{p-1}(e) \neq 0$ donc $L_{\mathcal{G}}^{p-1}$ n'est pas l'endomorphisme nul. Ainsi $\boxed{L_{\mathcal{G}} \text{ est nilpotent d'indice } p}$.

ii. Le sous-espace $\mathcal{H}$, qui est un supplémentaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$, est de dimension $n-p$, strictement compris entre 1 et n : on peut alors appliquer tout ce qui précède à l'endomorphisme induit $L_{\mathcal{H}}$. En itérant ce raisonnement on peut conclure que $\mathcal{E}$ est somme directe de s sous-espaces vectoriels $\mathcal{E}_\ell$ ($\ell = 1, \ldots, s$) dont chacun est stable par L et a pour dimension l'indice de nilpotence de l'endomorphisme induit par L sur ce même sous-espace avec de plus $\mathcal{E}_1 = \mathcal{G}$.

Partie II

5. a. Soit (U, V, W) un triplet d'endomorphismes de $\mathcal{E}$. On a :

$$[U, V \circ W] = U \circ V \circ W - V \circ W \circ U \qquad (\heartsuit)$$

Or on a :

$$\begin{aligned}[U,V] \circ W + V \circ [U,W] &= (U \circ V - V \circ U) \circ W + V \circ (U \circ W - W \circ U) \\ &= U \circ V \circ W - V \circ W \circ U.\end{aligned}$$

Avec $(\heartsuit)$ on peut donc conclure que : $\boxed{[U, V \circ W] = [U,V] \circ W + V \circ [U,W]}$.

b. • Supposons que pour un certain $q \geqslant 1$ entier on ait $[A, B^q] = q\alpha B^q$. Selon la question précédente on a alors :

$$\begin{aligned}[A, B^{q+1}] &= [A, B^q \circ B] = [A, B^q] \circ B + B^q \circ \underbrace{[A,B]}_{=\alpha B} \\ &= q\alpha B^q \circ B + B^q \circ (\alpha B) \\ &= (q+1)\alpha B^{q+1}.\end{aligned}$$

Comme $[A,B] = \alpha B$, on peut conclure par récurrence que pour tout $q \geqslant 1$ entier on a :

$$\boxed{[A, B^q] = q\alpha B^q}.$$

• Écrivons $P = \sum_{q=0}^{m} a_q X^q$. On a $P' = \sum_{q=1}^{m} q a_q X^{q-1}$. Mais pour tout $q \geqslant 1$ entier on a démontré que $[A, B^q] = q\alpha B^q$, égalité triviale lorsque $q = 0$. Ainsi on a :

$$\sum_{q=0}^{m} a_q [A, B^q] = \sum_{q=0}^{m} a_q q \alpha B^q = \alpha B \circ \left(\sum_{q=1}^{m} q a_q B^{q-1} \right) = \alpha B \circ P'(B).$$

Mais, par linéarité de $M \mapsto [A, M]$, on obtient de suite :

$$\sum_{q=0}^{m} a_q [A, B^q] = \left[A, \sum_{q=0}^{m} a_q B^q \right] = [A, P(B)].$$

Conclusion. On a $\boxed{[A, P(B)] = \alpha B \circ P'(B)}$.

• Montrons que pour tout entier $k \geqslant 0$ entier, le sous-espace $\ker B^k$ est stable par A.
Si $k = 0$, le résultat est évident puisqu'alors $\ker B^k = \ker \mathrm{Id}_E = \{0\}$. Supposons dorénavant que $k \geqslant 1$. Prenons x dans $\ker B^k$. On prend $P = X^k$ dans l'égalité précédente et on obtient :

$$[A, B^k](x) = \alpha B^k(x) = 0$$

donc $0 = A \circ \underbrace{B^k(x)}_{=0} - B^k \circ A(x)$ donc $B^k(A(x)) = 0$ ce qui démontre que $A(x) \in \ker B^k$.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout entier } k \geqslant 0 \text{ entier, le sous-espace } \ker B^k \text{ est stable par } A}$.

c. **Question superbe !**

• Considérons la famille $(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}, B, \dots, B^{n^2})$. C'est une famille de cardinal n^2+1 dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ qui est un espace de dimension n^2 : elle est donc liée. Il existe alors $\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2}$ réels **non tous nuls** tels que :

$$\alpha_0 \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + \alpha_1 B + \cdots + \alpha_{n^2} B^{n^2} = 0.$$

Il en résulte que $\boxed{\text{le polynôme } P = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k \text{ est non nul et annule } B}$.

• Considérons, comme nous invite à le faire l'énoncé, l'endomorphisme

$$C = dP_0(B) - B \circ P_0'(B)$$

où P_0 est un polynôme non nul de degré minimal d tel que $P_0(B) = 0$.

D'après la question précédente, on a $[A, P_0(B)] = \alpha B \circ P_0'(B)$ ce qui donne, puisque $P_0(B) = 0$:

$$\alpha B \circ P_0'(B) = 0.$$

Comme $\alpha \neq 0$ on a $B \circ P_0'(B) = 0$ et ainsi $C = 0$. Il en résulte que le polynôme $Q = dP_0 - XP_0'$ est un polynôme annulateur de B. Mais Q est degré $< d$ (facile) donc $Q = 0$ par définition de d. Il vient alors : $dP_0 = XP_0'$ donc $P_0 = \beta X^d$ où β est un réel non nul (facile en écrivant $P_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et en identifiant...). Or on a $P_0(B) = 0$ donc $B^d = 0$.

Conclusion. $\boxed{B \text{ est nilpotent}}$.

6. a. i. En utilisant les résultats de la question 3 on a de suite $\boxed{\mathrm{rg}(B^{n-1}) = 1}$.

ii. Soit maintenant x dans $E \setminus \ker B^{n-1}$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $x_k = B^k(x)$. Comme $B^n = 0$ (puisque B est nilpotent), pour tout k dans $\{1, \dots, n\}$, $x_k \in \ker B_k$ et même les k vecteurs $x_1, \dots, x_k$ sont dans $\ker B^k$. Mais $(x_1, \dots, x_n) = (B^{n-1}(x), \dots, B(x), x)$ est une famille libre de $\mathcal{E}$ (on le montre comme à la question 4a) ce qui assure que, pour tout k dans $\{1, \dots, n\}$, $(x_1, \dots, x_k)$ est une famille libre de $\ker B^k$ qui, on l'a vu, est de dimension k.

Conclusion. Avec le choix fait de x, $\boxed{(x_1, \dots, x_k) \text{ est une base de } \ker B^k}$.

b. i. Montrons que x_1 est un vecteur propre de A. On a $x_1 \in \ker B$ et $x_1 \neq 0$. Puis :

$$[A, B](x_1) = \alpha B(x_1)$$

donc $B \circ A(x_1) = 0$ et ainsi $A(x_1) \in \ker B$ qui est de dimension 1, engendré par x_1. Il existe alors λ réel tel que $A(x_1) = \lambda x_1$.

Conclusion. $\boxed{x_1 \text{ est un vecteur propre de } A}$.

ii. Notons β la base $(x_1, \dots, x_n)$ de E. Pour tout k dans $\{1, \dots, n\}$, $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_k) = \ker B^k$ qui est de dimension k et qui est A-stable. Il en résulte (voir cours) que $A \in TS_n(\mathbb{R})$ i.e. $[A]_\beta$ a la forme suivante :

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & & & \heartsuit \\ 0 & \clubsuit & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \spadesuit \end{pmatrix}.$$

iii. Regardons maintenant les éléments de la diagonale principale de $[A]_\beta$. Pour k dans $\{1, \dots, n\}$, on note λ_k l'élément de la diagonale principale de $[A]_\beta$ situé sur la k-ième colonne.

— On a $\lambda_1 = \lambda$.
— Pour trouver λ_2 on écrit $A(x_2) = \gamma x_1 + \lambda_2 x_2$ où γ est un réel. On a alors :

$$B \circ A(x_2) = \gamma \underbrace{B(x_1)}_{=0} + \lambda_2 B(x_2) = \lambda_2 x_1.$$

Ainsi :

$$[A,B](x_2) = A(x_1) - B \circ A(x_2) = A(x_1) - \lambda_2 x_1 = (\lambda - \lambda_2)x_1$$

or on a aussi $[A,B](x_2) = \alpha B(x_2) = \alpha x_1$ donc on obtient (puisque $x_1 \neq 0$) :

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda - \alpha}.$$

— Supposons maintenant que $\lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha$ pour un certain k entier compris entre 1 et $n-1$. La forme de $[A]_\beta$ permet d'écrire :

$$A(x_{k+1}) = \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

où $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1}$ sont des réels. Il en résulte que :

$$B \circ A(x_k) = \gamma_2 x_1 + \cdots + \gamma_k x_{k-1} + \lambda_{k+1} x_k$$

et ainsi $[A,B](x_{k+1}) = Ax_k - (\gamma_2 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_k)$ a pour composante $\lambda_k - \lambda_{k+1}$ selon le vecteur x_k. Comme on a $[A,B](x_{k+1}) = \alpha B(x_{k+1}) = \alpha x_k$ on obtient :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \alpha = \lambda - k\alpha.$$

On a donc démontré, par récurrence finie, que :

$$\boxed{(\forall k \in \{1, \ldots, n\})\,(\lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha)}.$$

En particulier $\boxed{\lambda_n = \lambda - (n-1)\alpha \text{ est valeur propre de } A}$.

c. Supposons que x soit un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ. On a donc $A(x) = \mu x$. Ainsi :

$$\alpha B(x) = [A,B](x) = A \circ B(x) - B \circ A(x) = A(B(x)) - \mu B(x).$$

Il vient donc $(A - (\mu + \alpha)I) \circ B(x) = 0$. Il en résulte que :

— ou bien $B(x)$ est le vecteur nul ;
— ou bien $B(x)$ est vecteur propre de A pour la valeur propre $\alpha + \mu$.

d. • On a bien vu que $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A : on peut donc choisir un vecteur propre e_n de A. On pose :

$$e_1 = B^{n-1}(e_n).$$

Comme $B^n = 0$, on a $e_1 \in \ker B$.

De plus, selon la question précédente :

— ou bien $B(e_n) = 0$;
— ou bien $B(e_n) = e_{n-1}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda - (n-2)\alpha$.

Dans le premier cas, e_n engendre la droite vectorielle $\ker B$ (rappelons nous que $\operatorname{rg}(B) = n-1$). Alors, avec $x = e_n$, on peut construire des vecteurs x_k comme à la question 6. En désignant par μ la valeur propre associée à x_1, on sait que $x_n = x = e_n$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\mu - (n-1)\alpha$. Il en résulte que

$$\lambda - (n-1)\alpha = \mu - (n-1)\alpha$$

ce qui amène $\lambda = \mu$. Or on a aussi :

$$x_{n-1}B(x) = B(e_n) = 0$$

ce qui est impossible.

On est donc **dans le second cas** : $B(e_n)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda - (n-2)\alpha$. De plus :

— ou bien $B(e_{n-1}) = 0$

— ou bien $B(e_{n-1}) = e_{n-2}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda-(n-3)\alpha$.

Dans le premier cas on raisonne comme ci-dessus pour aboutir à une contradiction. Ainsi, par un *raisonnement de descente*, on prouve que , pour chaque k dans $\{1,\dots,n\}$, e_k est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda - (n-k-1)\alpha$.

Or A est diagonalisable (car A possède n valeurs propres distinctes) et ainsi la base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de diagonalisation de A. Enfin on a :

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda-\alpha & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda-(n-1)\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Partie III

7. On notera ici AB pour $A \circ B$...Par hypothèse, on a : $[A,B] = \alpha B$, $[A,C] = \beta C$ e $[B,C] = A$. De là :

$$\begin{cases} \alpha BC &= [A,B]C = ABC - BAC \\ \beta BC &= B[A,C] = BAC - BCA \\ -\alpha CB &= -C[A,B] = CBA - CAB \\ -\beta CB &= -[A,C]B = CAB - ACB \end{cases}$$

Par somme il vient $(\alpha+\beta)[B,C] = A[B,C]-[B,C]A = A^2 - A^2 = 0$. Il en résulte que $(\alpha+\beta)A = 0$ et comme A est non nulle, $\alpha+\beta = 0$.

8. a) Comme $[A,B] = \alpha A$, d'après la question 6d), A est diagonalisable. Puis on a $A = [B,C]$ donc $\mathrm{tr}(A) = 0$ et ainsi la somme des valeurs propres de A est nulle. Mais toujours d'après la question 6d, il existe λ tel que les valeurs propres de A soient : $\lambda, \lambda-\alpha, \dots, \lambda-(n-1)\alpha$. On a donc :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda - (i-1)\alpha = n\lambda - \frac{(n-1)n}{2}\alpha.$$

Il vient donc $\lambda = \dfrac{1}{2}(n-1)\alpha$.

Conclusion. Les valeurs propres de A sont alors les $\lambda_k = \dfrac{(n-(2k-1))}{2}\alpha$ pour $k \in \{1,\dots,n\}$.

b) D'après la question précédente, 0 n'est valeur propre de A uniquement dans le cas n impair, et dans ce cas les $(n-1)$ autres valeurs propres sont non nulles.

Ainsi si n est pair $\mathrm{rg}(A) = n$ puisque A est inversible, et si n est impair $\mathrm{rg}(A) = n-1$ puisque la matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ dans A dans une base $\mathcal{B}$ telle que celle de la question 6d est alors de rang $(n-1)$.

c) • Notez qu'il n'existe pas qu'une seule telle base $\mathcal{B}$...On a :

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)}{2} & & & 0 \\ & \frac{(n-3)}{2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\frac{(n-1)}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a $[A, C](e_k) = -\alpha e_k$ donc :

$$A \circ C(e_k) = C \circ A(e_k) - \alpha C(e_k) = \left(\frac{(n-(2k-1))}{2} \alpha - \alpha \right) C(e_k) = \frac{1}{2}(n - (2k+1))\, \alpha\, C(e_k).$$

Il en résulte que $C(e_n)$ est dans le noyau de $A + \frac{1}{2}(n+1)\, I$ qui est trivial puisque $-\frac{1}{2}(n+1)$ n'est pas dans le spectre de A : $\boxed{C(e_n) = 0}$.

Fixons maintenant k dans $\{1, \ldots, n-1\}$. On vient de voir que :

$$C(e_k) \in \ker \left(A - \frac{1}{2}(n - (2k+1))\, I \right) = \text{vect}(e_{k+1}).$$

Il existe donc μ_k réel tel que $C(e_k) = \mu_k e_{k+1}$. Puis on a :

$$B \circ C(e_k) - C \circ B(e_k) = A(e_k) = \lambda_k e_k.$$

— Pour $k = 1$ cela donne $B \circ C(e_1) = \lambda_1 e_1$ i.e. $\mu_1 B(e_2) = \lambda_1 e_1$ donc $\mu_1 = \lambda_1$.

— Lorsque $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ il vient $\mu_k B(e_{k+1}) - C(e_{k-1}) = \lambda_k e_k$ i.e. $C(e_{k-1}) = (\mu_k - \lambda_k)\, e_k$ de sorte que $\mu_{k-1} = \mu_k - \lambda_k$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu_1 + \sum_{\ell=2}^{k} \lambda_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \\ &= \sum_{\ell=2}^{k} \frac{(n+1-2\ell)}{2}\, \alpha = \frac{1}{2}\alpha k(n-k), \end{aligned}$$

formule également valable pour $k = 1$.

On a donc, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $C(e_k) = \underbrace{\frac{1}{2}\alpha k(n-k)}_{=\mu_k}\, e_{k+1}$ et $C(e_n) = 0$.

La matrice de C dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$[C]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

• Le reste de la question est du calcul matriciel...

d) C est de rang $n-1$ puisque sa matrice dans $\mathcal{B}$ est de rang $n-1$ (noter que les μ_k sont non nuls pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$).

e) Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable à la fois par A, B et C. On suppose que $\mathcal{F} \neq \{0\}$.

Soit $x \in F$ que l'on écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ où $(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{B}$.

— Si $x_n \neq 0$ on a $B^{n-1}(x) = x_n e_1 \in \mathcal{F}$ donc $e_1 \in \mathcal{F}$. Puis $B^{n-2}(x) = x_{n-1}e_1 + x_n e_2 \in \mathcal{F}$ donc $e_2 \in \mathcal{F}$. En itérant ce raisonnement, on obtient que tous les éléments de $\mathcal{B}$ sont dans $\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

— Supposons maintenant que $x_n = 0$ avec x non nul, ce qui est possible. L'ensemble $\{k \in\in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \neq$ est non vide et fini : il admet ainsi un plus grand élément que l'on note m. Il vient alors :

$$\begin{cases} x & = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k \\ B(x) & = \sum_{k=1}^{m-1} x_{k+1} e_k \\ & \vdots \\ & \vdots \\ B^{m-1}(x) & = x_m e_1 \end{cases}$$

Ainsi $e_1 \in \mathcal{F}$ et l'on obtient de la même manière que plus haut $e_2 \in \mathcal{F}$, $\ldots e_m \in \mathcal{F}$.
Puis $e_{m+1} = \dfrac{1}{\mu_m} C(e_m) \in \mathcal{F}$ et ainsi de suite jusqu'à $e_n \in \mathcal{F}$. On a encore $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

9. Dans cette question on a donc $[A, B] = 2B$, $[A, C] = -2C$, $[B, C] = A$.

a. • Supposons que pour un certain $i \geqslant 1$ entier on ait : $[B, C^i] = iC^{i-1}(A - (i-1)I)$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} BC^{i+1} &= (BC^i)C = \left[C^i B + iC^{i-1}(A - (i-1)I)\right] C \\ &= C^i BC + iC^{i-1}(AC - (i-1)C) \\ &= C^i(CB + A) + iC^{i-1}(CA - 2C - (i-1)C) \\ &= C^{i+1}B + C^i A + iC^i A - 2iC^i - i(i-1)C^i \\ &= C^{i+1}B + (i+1)C^i(A - iI) \end{aligned}$$

donc $[B, C^{i+1}] = C^{i+1}B + (i+1)C^i(A - iI)$.
Comme on a bien $[B, C^1] = A$ on peut conclure par récurrence. que la relation $[B, C^i] = iC^{i-1}(A - (i-1)I)$ est vraie pour tout $i \geqslant 1$.

• **Existence d'une valeur propre de** A. Comme $[A, C] = -2C$, on peut appliquer le résultat de la question 5c : C est nilpotent. Soit p l'indice de nilpotence de C ($p \geqslant 2$). On a :

$$0 = [B, C^p] = pC^{p-1}(A - (p-1)I).$$

Ainsi $\mathrm{Im}\,(A - (p-1)I) \subset \ker pC^{p-1}$ qui est distinct de $\mathcal{E}$, car $C^{p-1} \neq 0$. Le théorème du rang affirme alors que $\dim \ker(A - (p-1)I) \geqslant 1$: $(p-1)$ est valeur propre de A.

b. • **Montrons que** A **est diagonalisable**. Soit $\mathcal{F}$ la somme des sous-espaces propres de A (il y en a d'après la question précédente). On a $\mathcal{F} \neq \{0\}$ et $\underline{\mathcal{F} \text{ est stable par } A}$.

Montrons alors que $\mathcal{F}$ est stable par B et C, et selon l'hypothèse de cette question, on pourra conclure que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ donc que A est diagonalisable. Soit $x \in \mathcal{F}$. Ce vecteur x est un vecteur propre de A pour une certaine valeur propre λ.

— On a $2B(x) = AB(x) - BA(x) = AB(x) - \lambda B(x)$. Il vient donc $AB(x) = (\lambda + 2)B(x)$, donc $B(x) \in \ker(1 - (\lambda + 2)I) \subset \mathcal{F}$.
Il en résulte que $\underline{\mathcal{F} \text{ est stable par } B}$.

— On a $-2C(x) = AC(x) - CA(x) = AC(x) - \lambda C(x)$ donc $AC(x) = (\lambda - 2)C(x)$ et $C(x) \in \ker(A - (\lambda - 2)I) \subset \mathcal{F}$: $\underline{\mathcal{F} \text{ est stable par } C}$.

c. • On va montrer que $\mathrm{rg}(B) = n - 1$. Pour toute valeur propre λ de A et tout x vecteur propre associé (donc non nul), d'après les calculs ci-dessus, on a l'alternative :

— soit $B(x) = 0$;
— soit $B(x)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\lambda + 2$.

Si la première éventualité est exclue pour toutes les valeurs propres de A, on obtient $\#\mathrm{Spec}(A) > n$ ce qui est impossible. Il existe donc une valeur propre λ de A et un vecteur propre associé ε_1 tel que : $B(\varepsilon_1) = 0$.

On pose alors pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$: $\varepsilon_k = \dfrac{1}{(k-1)!} C^{k-1}(\varepsilon_1)$.

On a alors : (♣♣) $\begin{cases} C(\varepsilon_k) = k\varepsilon_{k+1} & \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, n-1\} \\ C(e_n) = \dfrac{1}{n!} C^n(e_1) = 0 & \text{puisque } C \text{ est nilpotent.} \end{cases}$

Mais on a aussi le résultat suivant : pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $A(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$ où $\lambda_k = (\lambda - 2(k-1))$.

En effet c'est vrai pour $k = 1$ et si c'est vrai pour un certain $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ il vient :

$$AC(\varepsilon_k) - CA(\varepsilon_k) = -2C(\varepsilon_k) = -2k\varepsilon_{k+1},$$

donc $kA(\varepsilon_{k+1}) - \lambda_k C(\varepsilon_k) = -2k\varepsilon_{k+1}$ d'où $A(\varepsilon_{k+1} = 2\varepsilon_{k+1} + \lambda_k \varepsilon_{k+1} = \lambda_{k+1}\varepsilon_{k+1}$.

On montre de même par récurrence que pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$ on a $B(\varepsilon_k) = (\lambda - k + 2)\varepsilon_{k-1}$.

Conclusion. $\mathcal{F} = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est stable par A, B et C ; donc $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ et $b = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathcal{E}$ (qui diagonalise au passage A, B et C) et, avec (♣♣) C est de rang $n - 1$.

Commentaire. En utilisant le fait que A est de trace nulle, on obtient, comme attendu, $\lambda = n - 1\ldots$

FIN DE LA CORRECTION
