Un problème d'algèbre linéaire, niveau +

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.

Pour tout entier $i \geqslant 0$, et tout endomorphisme A de $\mathcal{E}$, A^i est l'endomorphisme définie par récurrence par $A^{i+1} = A^i \circ A$ et $A^0 = I$ où I est l'identité de $\mathcal{E}$; pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ d'une variable, à coefficients réels, $P(A)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i A_i$.

L'image et le noyau de A sont notés $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$. Un endomorphisme A est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $q > 0$ entier tel que $A^q = 0$; le plus petit de ces entiers q s'appelle *l'indice de nilpotence* de A.

Partie I

Dans toute cette partie L est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{E}$ et on note p son indice de nilpotence.

1. a. Soit $i \geqslant 0$ un entier. Démontrer que $\ker L^i \subset \ker L^{i+1}$ et $\operatorname{Im} L^{i+1} \subset \operatorname{Im} L^i$ puis que l'égalité $\ker L^i = \ker L^{i+1}$ équivaut à l'égalité $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$ et qu'elle entraîne l'égalité $\operatorname{Im} L^j = \operatorname{Im} L^i$ pour tout entier $j \geqslant i$.

   b. Démontrer que si $\ker L^i$ est différent de $\mathcal{E}$ alors il est aussi différent de $\ker L^{i+1}$.

   c. Démontrer que la dimension du noyau de L^i croît strictement avec l'exposant i sur l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre 0 et p. En déduire que $L^n = 0$ et que, si $p = n$, on a $\dim \ker L^i = i$ pour tout i dans $\{0, \ldots, n\}$.

2. Dans cette question on suppose qu'il existe h dans $\{1, \ldots, n-1\}$ tel que L^h soit de rang $n - h$.

   a. Etablir que pour tout j dans $\{1, \ldots, h\}$, le rang de L^j est $n - j$.

   b. Pour tout entier $i \geqslant 0$, en considérant l'application $\Lambda : \operatorname{Im} L^i \to \operatorname{Im} L^{i+1}$ définie par $\Lambda(x) = L(x)$ pour x dans $\operatorname{Im} L^i$, établir une relation entre les dimensions des sous-espaces $\operatorname{Im} L^i$, $\operatorname{Im} L^{i+1}$ et $\operatorname{Im} L^i \cap \ker L$.

   c. Quel est l'indice de nilpotence de L ?

3. Dans cette question on suppose que le rang de L est égal à $n - 1$.

   a. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ stable par L et de dimension $r \geqslant 1$; on note M l'endomorphisme induit par L sur $\mathcal{F}$. Démontrer que pour tout j dans $\{1, \ldots, r\}$ on a $\ker M^j = \ker L^j \cap \mathcal{F}$. Quel est le noyau de L^r ?

   b. Caractériser les sous-espaces de $\mathcal{E}$ stables par L à l'aide des noyaux des endomorphismes L^i.

4. Dans cette question on suppose que l'indice de nilpotence p de L est *strictement* compris entre 1 et n. On note e un élément de $\mathcal{E}$ tel que $L^{p-1}(e) \neq 0$.

   a. Justifier de l'existence d'un tel vecteur e et démontrer que la famille $(e, L(e), \ldots, L^{p-1}(e))$ est libre.
   On notera dans la suite $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel $\operatorname{vect}(e, L(e), \ldots, L^{p-1}(e))$.

   b. Pour tout u dans le dual $\mathcal{E}^* = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$, on note ${}^tL(u) = u \circ L$.
   Démontrer que ${}^tL$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}^*$ puis que pour tout i dans $\mathbb{N}$ on a : ${}^t(L^i) = ({}^tL)^i$.

   c. Soit ε un élément de $\mathcal{E}^*$ tel que $({}^tL)^{p-1}(\varepsilon)(e) \neq 0$. On pose :

   $$\mathcal{H}^* = \operatorname{vect}(\varepsilon, {}^tL(\varepsilon), \ldots, ({}^tL)^{p-1}(\varepsilon))$$

   Quelle est la dimension de $\mathcal{H}^*$?

   d. On note $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{E} \mid (\forall u \in \mathcal{H}^*)(u(x) = 0)\}$.
      i. Quelle est la dimension de $\mathcal{H}$?
      ii. Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace L-stable de $\mathcal{E}$.
      iii. Démontrer que $\mathcal{E} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$.

   e. i. Démontrer que $\mathcal{G}$ est L-stable puis que l'endomorphisme induit $L_{\mathcal{G}}$ est nilpotent d'indice p.
      ii. Démontrer alors que $\mathcal{E}$ est somme directe de s sous-espaces vectoriels $\mathcal{E}_\ell$ $(\ell = 1, \ldots, s)$ dont chacun est stable par L et a pour dimension l'indice de nilpotence de l'endomorphisme induit par L sur ce même sous-espace.

Partie II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple (A, B) d'endomorphisme de $\mathcal{E}$ on note $[A, B]$ l'endomorphisme $A \circ B - B \circ A$.

Dans cette partie A et B sont des endomorphismes de $\mathcal{E}$, non nuls, et α est un réel non nul tel que :

$$[A, B] = \alpha B$$

5. a. Pour tout triplet (U, V, W) d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, vérifier l'égalité :

   $$[U, V \circ W] = [U, V] \circ W + V \circ [U, W].$$

   b. Soient P dans $\mathbb{R}[X]$ et P' son polynôme dérivé. Démontrer que pour tout $q \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$ on a :

   $$[A, B^q] = q\alpha B^q$$

   En déduire que $[A, P(B)] = \alpha B \circ P'(B)$ puis que, pour tout entier $k \geqslant 0$, le sous-espace $\ker B^k$ est stable par A.

   c. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(B) = 0$.

   Démontrer que B est nilpotent (*on pourra utiliser l'endomorphisme* $dP_0(B) - B \circ P_0'(B)$ *où P_0 est un polynôme non nul de degré minimal d tel que $P_0(B) = 0$*).

6. Dans cette question on suppose que le rang de B est $n - 1$.

a. i. Quel est le rang de B^{n-1} ?

ii. Comment peut-on choisir x dans $\mathcal{E}$ de façon qu'en posant $x_k = B^{n-k}(x)$ pour tout k dans $\{1, \ldots, n\}$, la famille $(x_1, \ldots, x_j)$ soit une base de $\ker B^j$ pour tout j dans $\{1, \ldots, n\}$?

b. i. Démontrer que x_1 est un vecteur propre de A dont on notera λ la valeur propre associée.

ii. Quelle est la forme de la matrice de A dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$?

iii. Quels sont les éléments successifs de la diagonale principale de cette matrice ? En déduire que $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A.

c. Démontrer que si x est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre μ, $B(x)$ est un vecteur nul ou un vecteur propre de A dont on précisera la valeur propre associée.

d. Soit e_n un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$; pour tout entier k dans $\{1, \ldots, n\}$ on pose $e_k = B^{n-k}(e_n)$. Démontrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$ dans laquelle A se diagonalise et rappeler les expressions des matrices de A et B dans cette base.

Partie III

Dans cette partie A, B et C sont trois endomorphismes non nuls de $\mathcal{E}$ et α et β deux réels non nuls tels que :

$$[A, B] = \alpha B, \ [A, C] = \beta C, \ [B, C] = A.$$

7. Calculer la valeur de $(\alpha + \beta)[B, C]$ et en déduire que α et β sont nécessairement opposés.

8. Dans cette question on suppose que le rang de B est $n - 1$.

   a. Trouver numériquement la somme des valeurs propres de A et en déduire ces valeurs propres.

   b. Quel est, en fonction de n, le rang de A ?

   c. Calculer explicitement la matrice C relative à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$ définie à la question 6d et vérifier que les endomorphismes A, B et C ainsi déterminés par leur matrices dans $\mathcal{B}$ satisfont aux conditions imposées au début de cette partie III.

   d. Quel est le rang de C ?

   e. Démontrer que $\{0\}$ et $\mathcal{E}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ stables à la fois par A, B et C.

9. Dans cette question on suppose que $\alpha = 2$ et que $\{0\}$ et $\mathcal{E}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ stables à la fois par A, B et C ; aucune hypothèse n'est faite sur le rang de B.

   a. Pour tout entier $i \geqslant 1$ établir l'égalité :

   $$[B, C^i] = iC^{i-1}(A - (i-1)I)$$

   et en déduire l'existence d'une valeur propre de A.

   b. Montrer que A est diagonalisable et que B est de rang $n - 1$.

FIN DE L'ÉNONCÉ