
 Devoir supplémentaire n° 6, une correction

I - Préliminaires

1. Posons $u_n(x) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, alors chaque fonction u_n est définie et continue sur \mathbb{R} . De plus, $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente), ceci prouve la convergence normale sur \mathbb{R} de la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 1} u_n$, la fonction somme R est alors définie et continue sur \mathbb{R} .
2. La fonction $v : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $v(0) = 1$, d'où son intégrabilité sur $]0, 1]$. Pour $x \geq 1$, on a $|v(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ avec $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$, donc v est aussi intégrable sur cet intervalle. Finalement, v est intégrable sur $]0, +\infty[$, et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ est (absolument) convergente.
3. Posons $w(x, t) = f(t) e^{-ixt}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Alors $t \mapsto w(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} , $x \mapsto w(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , et on a la domination $|w(x, t)| = |f(t)|$ avec f intégrable sur \mathbb{R} . Du théorème de continuité des intégrales à paramètre, on déduit l'existence et la continuité sur \mathbb{R} de $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) dt$.

II - Etude de la dérivabilité de R en 0

4. De $|f(nh)| \leq \frac{C}{n^2h^2+1}$, on déduit la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 0} f(nh)$, donc l'existence de $S(h)$.
5. L'application ϕ_h est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ . En effet

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [kh, (k+1)h[\quad \phi_h(t) = f(kh),$$

donc ϕ_h est continue (car constante) sur $]kh, (k+1)h[$. De plus

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \rightarrow (kh)^+} \phi_h(t) = \phi_h(kh) = f(kh);$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \rightarrow (kh)^-} \phi_h(t) = f((k-1)h),$$

il y a donc une limite à gauche et une limite à droite finies en les points kh , $k \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, on

$$a \quad \int_0^{nh} \phi_h(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \phi_h(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} h f(kh) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(h).$$

De plus, la fonction ϕ_h est intégrable sur \mathbb{R}^+ car :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\phi_h(t)| = \left| f\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right) \right| \leq \frac{C}{1 + \left[\frac{t}{h}\right]^2 h^2},$$

et la fonction majorante, équivalente à $t \mapsto \frac{C}{t^2}$ en $+\infty$, est intégrable sur \mathbb{R}^+ . On peut donc écrire

$$\int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t) dt = S(h).$$

6. Si $h \in]0, 1]$ et $t \in [1, +\infty[$, alors $\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \geq \left(\frac{t}{h} - 1\right) h = t - h \geq t - 1 \geq 0$, donc

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1 + \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor^2 h^2} \leq \frac{C}{1 + (t-1)^2}.$$

7. On va utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

— On a pour tout $h > 0$:

$$t - h = \left(\frac{t}{h} - 1\right) h \leq \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \leq \frac{t}{h} h = t$$

donc, par sandwich, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h = t$, puis $\phi_h(t) = f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(t)$ par continuité de f .

— La fonction f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|\phi_h(t)| \leq C$, et pour $t \geq 1$, on peut utiliser la majoration démontrée en question 6., on a finalement la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\phi_h(t)| \leq \alpha(t),$$

avec $\alpha(t) = \begin{cases} C & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, et la fonction α continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique donc :

$$S(h) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

8. La fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R} . On a clairement $|(t^2 + 1)f(t)| = \frac{t^2 + 1}{t^2} |\sin(t^2)| \leq 1$ si $t \neq 0$ (et aussi si $t = 0$), donc f satisfait les hypothèses posées en chapeau de cette partie II. Ainsi,

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = h \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 h^2)}{n^2 h^2}\right) = h + \frac{1}{h} R(h^2) \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{} \int_0^{+\infty} f(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc $R(h^2) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} h$ lorsque $h \rightarrow 0^+$. En posant $h = \sqrt{x}$, on a $R(x) \sim \sqrt{\frac{\pi x}{2}}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Donc

$$\frac{R(x) - R(0)}{x - 0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Conc La fonction R n'est pas dérivable en 0.

III - Formule sommatoire de Poisson

9. Pour n entier relatif et x réel, posons $f_n(x) = f(x + 2n\pi)$. On a alors $|f_n(x)| \leq \frac{C_1}{(x + 2n\pi)^2 + 1}$, ce qui entraîne la convergence absolue des séries $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}(x)$, donc l'existence de $F(x)$. On a, par décalage d'indice,

$$F(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2(n+1)\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) = F(x),$$

la fonction F est donc 2π -périodique. Il suffit alors de montrer la continuité de F sur le segment $S =]0, 2\pi]$. Chaque fonction f_n est continue sur S , et on a

$$\forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leq \frac{C_1}{(x + 2n\pi)^2 + 1} \leq \frac{C_1}{4\pi^2 n^2 + 1}.$$

Comme ce majorant est le terme général d'une série convergente indépendante de x , on a prouvé la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur S . On procède de même pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$, en écrivant

$$\forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_{-n}(x)| \leq \frac{C_1}{(x - 2n\pi)^2 + 1} \leq \frac{C_1}{4\pi^2(n-1)^2 + 1}$$

et on a aussi la convergence normale sur S de cette série. Il en résulte la continuité de F sur \mathbb{R} .

10. Pour n entier relatif et x réel, posons $g_n(x) = \widehat{f}(n) e^{inx}$. Alors chaque fonction g_n est continue sur \mathbb{R} et on a

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g_n(x)| = |\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{n^2 + 1},$$

ce qui donne directement la convergence normale sur \mathbb{R} des séries $\sum_{n \geq 0} g_n$ et $\sum_{n \geq 1} g_{-n}$. Il en résulte que G est bien définie et continue sur \mathbb{R} . Enfin, chaque fonction g_n est 2π -périodique, donc G aussi.

11. D'après la propriété admise en chapeau de cette partie, pour montrer l'égalité $G = 2\pi F$, il suffit de montrer que l'on a $c_p(G) = c_p(2\pi F)$, soit $c_p(G) = 2\pi c_p(F)$ pour tout p entier relatif. Or,

$$c_p(G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{i(n-p)t} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = \widehat{f}(p)$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = \delta_{n,p}$, l'interversion série-intégrale étant autorisée par la convergence normale sur le segment $[0, 2\pi]$ de la série de fonctions $\sum h_n$ avec $h_n(t) = \widehat{f}(n) e^{i(n-p)t}$, on a en effet $\|h_n\|_\infty = |\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{n^2+1}$. D'autre part,

$$c_p(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + 2n\pi) e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2n\pi) e^{-ipt} dt$$

car la série de fonctions $\sum k_n$, avec $k_n(t) = f(t + 2n\pi) e^{-ipt}$, converge aussi normalement sur le segment $[0, 2\pi]$ car $|k_n(t)| = |f(t + 2n\pi)| \leq \frac{1}{(t+2n\pi)^2+1} \leq \frac{1}{4n^2\pi^2+1}$ pour n positif, et on adapte pour n négatif (cf. corrigé de la question 9.). On obtient alors, par translation de la variable puis relation de Chasles,

$$\begin{aligned} c_p(F) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u) e^{-ip(u-2n\pi)} du = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u) e^{-ipu} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-ipu} du = \frac{\widehat{f}(p)}{2\pi} = \frac{c_p(F)}{2\pi}. \end{aligned}$$

On conclut que $G = 2\pi F$.

12. Posons $g(t) = f\left(\frac{at}{2\pi}\right)$. Alors g est continue sur \mathbb{R} et la fonction $t \mapsto (t^2 + 1)g(t)$ est bornée sur \mathbb{R} car elle est continue sur \mathbb{R} et bornée au voisinage de $\pm\infty$ en vertu de la majoration $|(t^2 + 1)g(t)| \leq C_1 \frac{t^2+1}{\left(\frac{at}{2\pi}\right)^2 + 1}$. Alors $\widehat{g}(x) = \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ par un changement de variable linéaire dans l'intégrale de

définition, et la fonction $x \mapsto (x^2 + 1) \widehat{g}(x)$ est aussi bornée pour des raisons similaires. On peut donc appliquer le résultat de la question 11., soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi)$, ce qui donne bien la relation

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

IV - étude de la dérivabilité de R en π

13. Pour tout t réel (y compris pour $t = 0$), on a $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} t^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!} t^{2k}$. La fonction f est développable en série entière sur \mathbb{R} , donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} d'après le cours.

14. Pour $t \neq 0$, on calcule

$$f'(t) = \frac{2i e^{it^2}}{t} - \frac{2(e^{it^2} - 1)}{t^3}, \quad \text{puis} \quad f''(t) = -4e^{it^2} - \frac{6i e^{it^2}}{t^2} + \frac{6(e^{it^2} - 1)}{t^4}.$$

Comme $|e^{it^2}| = 1$, on a immédiatement $f'(t) \rightarrow 0$ et $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

15. La fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur \mathbb{R} et paire, elle est donc intégrable sur le segment $[-1, 1]$ et, pour montrer la (semi)-convergence de l'intégrale proposée, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$. Or, si $A \in [1, +\infty[$, le changement de variable $x = \sqrt{t}$ puis une intégration par parties donnent

$$\int_1^A e^{ix^2} dx = \int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{i}{2} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \right]_1^{A^2} - \frac{i}{4} \int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{t^{3/2}} dt.$$

L'expression entre crochets tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ et la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $O(t^{-3/2})$ en $+\infty$, chacun des deux termes issus de l'intégration par parties admet donc une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale généralisée I .

16. Pour x réel non nul, on intègre par parties :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \left[\frac{i}{x} f(t) e^{-ixt} \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} - \frac{i}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-ixt} dt$$

Le terme entre crochets est nul car $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$. On recommence :

$$\widehat{f}(x) = -\frac{i}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-ixt} dt = \left[\frac{1}{x^2} f'(t) e^{-ixt} \right]_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} - \frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t) e^{-ixt} dt.$$

Le terme entre crochets est de nouveau nul car $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$. Posons maintenant $r(t) = f''(t) + 4e^{it^2}$. La question 14. nous apprend que $r(t) = O(t^{-2})$ en $\pm\infty$. Cette fonction r , qui est continue sur \mathbb{R} , est donc intégrable sur \mathbb{R} . On obtient

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t) e^{-ixt} dt = \frac{4}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)} dt - \frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-ixt} dt.$$

La mise sous forme canonique du trinôme $t^2 - xt$ montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^2-xt)} dt = I e^{-i\frac{x^2}{4}}$. Finalement,

$$|\widehat{f}(x)| \leq \frac{1}{x^2} \left(4|I| + \int_{-\infty}^{+\infty} |r(t)| dt \right),$$

ce qui montre que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

17. Les fonctions f et \widehat{f} sont continues sur \mathbb{R} et sont $O(t^{-2})$ en $\pm\infty$ (ce qui, pour une fonction continue sur \mathbb{R} , entraîne que $t \mapsto (t^2 + 1)f(t)$ est bornée sur \mathbb{R} , et pareillement pour \widehat{f}), on peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson obtenue dans la partie III. avec $a = \sqrt{x}$, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right),$$

soit

$$i + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right)$$

en séparant les termes pour $n = 0$ et en remarquant que la fonction f est paire, et \widehat{f} aussi en conséquence. Poursuivons :

$$i + \frac{2}{x}(F(x) - F(0)) = \frac{\widehat{f}(0)}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

soit

$$F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \widehat{f}(0) - \frac{i}{2}x + \sqrt{x} s(x),$$

avec $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$. Il reste à prouver que $s(x) = O(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Or, il existe $C > 0$

tel que $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{C}{t^2+1}$ pour tout réel t , ainsi $\left| \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \frac{C}{4n^2\pi^2} \leq \frac{Cx}{4n^2\pi^2}$, puis

$$|s(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \frac{C}{4\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) x,$$

ce qui suffit. On a donc $F(x) = F(0) + \frac{\widehat{f}(0)}{2} \sqrt{x} - \frac{i}{2}x + O(x^{3/2})$, soit le développement demandé avec $b = -\frac{i}{2}$ et $a = \frac{\widehat{f}(0)}{2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$. On peut exprimer cette intégrale en fonction de I : en effet, le calcul de f' réalisé à la question 14. montre que $tf'(t) = 2ie^{it^2} - 2f(t)$, ce que l'on peut écrire sous la forme $f(t) + (f(t) + tf'(t)) = 2ie^{it^2}$, puis en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ (toutes les fonctions sont intégrables sur \mathbb{R}),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt + [tf(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt,$$

soit (le terme entre crochets est nul) : $\widehat{f}(0) = 2iI$, puis $a = iI$.

18. On a $F(\pi + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(\pi+x)}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2\pi} e^{in^2x}}{n^2}$. Or, l'entier n^2 est de même parité que n , donc $e^{in^2\pi} = (-1)^n$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs (la série est absolument convergente), on écrit

$$\begin{aligned} F(\pi + x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i4p^2x}}{4p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)^2x}}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}F(4x) - \left(F(x) - \frac{1}{4}F(4x) \right) = \frac{1}{2}F(4x) - F(x). \end{aligned}$$

19. On a $R(x) = \Im(F(x))$. Or, la fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 « au voisinage à droite » du point π puisque, des questions **17.** et **18.**, on tire, pour $x > 0$,

$$F(\pi + x) = \frac{1}{2} \left(F(0) + 2a\sqrt{x} + 4bx + O(x^{3/2}) \right) - \left(F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \right),$$

d'où $F(\pi + x) = -\frac{1}{2}F(0) + bx + o(x) = -\frac{1}{2}F(0) - \frac{i}{2}x + o(x)$ et, en prenant la partie imaginaire, $R(\pi + x) = -\frac{1}{2}x + o(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Enfin, la fonction $x \mapsto R(\pi + x)$ étant impaire, on conclut que $R(\pi + x) = -\frac{1}{2}x + o(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Donc R admet un développement limité à l'ordre 1 au point π , et est donc dérivable en ce point avec $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.

FIN DE LA CORRECTION
