Devoir supplémentaire n° 6

Pour le lundi 27 janvier 2024

La ***présentation*** *de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Etude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Notations

— On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I - Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ est convergente.

   Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

II - Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leqslant \frac{C}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\phi_h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array}.$$

5. Montrer que $S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.
6. Montrer que, pour tous $h \in]0;1]$ et $t \in [1;+\infty[$, on a

$$|\phi_h(t)| \leqslant \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

7. En déduire que

$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ quand } h \to 0.$$

8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III - Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Si u est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t)e^{-ipt}dt \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leqslant \frac{C_1}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leqslant \frac{C_2}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

9. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

12. Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson.*

IV - Étude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{it^2}-1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \\ i & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

13. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un développement en série entière.
14. Etablir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.
15. Montrer que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est convergente.
16. Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

    On pose à présent
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

17. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \text{ quand } x \to 0 \text{ par valeurs strictement positives.}$$

    Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question 15).
18. Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.
19. Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

Fin de l'énoncé